Interrogation no. 3. Corrigé

1 – 7 : cours.

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'expression $\frac{e^{-x}-2}{(x+1)^2}$ n'a de sens que si $x \neq -1$, et dans ce dernier cas, le réel qu'elle désigne est strictement positif ssi $e^{-x} - 2 > 0$, autrement dit ssi $x < -ln(2)$. On en déduit que l'expression $\ln\left(\frac{e^{-x}-2}{(x+1)^2}\right)$ n'a de sens que pour $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, -\ln(2)[$.

(remarque : $-1 < -\ln(2)$ bien sûr, puisque le log est croissant et que $2 < e$)

9. Soit $P = X^3 - 2X + 1$. Alors $P(2) = 5$ et $P(1) = 0$. On en déduit que 1 est racine de P et 2 non.

10. La division euclidienne de $P = X^3 - 2X + 1$ par $X - 1$ donne $X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(X^2 + X - 1)$.

11. Les deux racines restantes de P sont celles de $Q = X^2 + X - 1$. On trouve facilement que c'est $(-1 - \sqrt{5})/2$ et $(-1 + \sqrt{5})/2$.

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A = X^n$, et $B = X^2 - 1$. La division euclidienne de A par B s'écrit $A = BQ + R$, avec $deg(R) < deg(B)$. Comme on a $B = (X - 1)(X + 1)$, la formule du cours donne immédiatement

$$R = \frac{A(1)(X+1) - A(-1)(X-1)}{2} = \frac{(X+1) - (-1)^n(X-1)}{2} = \frac{1-(-1)^n}{2}X + \frac{1+(-1)^n}{2}.$$