# Interrogation no. 4.

Calculatrices et documents/accès réseau etc interdits. La lettre $K$ désigne le corps des scalaires, donc $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (peut varier sur chaque exo). Un polynôme est un polynôme à coefficients dans $K$. Lire le sujet en entier pour repérer les points faciles.

1. (1 pt) Soient $A$ et $B$ deux ensembles, et $f : A \to B$ une application. Donner la définition de « $f$ est injective » et de « $f$ est surjective. »
2. (1 pt) Définition du polynôme dérivé d'un polynôme $P$.
3. (1 pt) Soient $P$ et $Q$ des polynômes. Définition du polynôme composé $P \circ Q = P(Q)$.
4. (1 pt) Définition de la division euclidienne de deux polynômes.
5. (1 pt) Soit $P \in K[X]$. Définition de « $P$ est scindé sur $K$. »
6. (3 pts) Soit $P \in K[X]$ et $\alpha \in K$. (Re)démontrer qu'il y a équivalence entre :
   (a) $(X - \alpha)|P$ et $(X - \alpha)^2$ ne divise pas $P$ ;
   (b) il existe un polynôme $Q$ tel que : $(P = (X - \alpha)Q$ et $Q(\alpha) \neq 0)$ ;
   (c) $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) \neq 0$.
7. (1 pt) Soient $P = X^2 + X + 1$ et $Q = 2X - 3$. Calculer $P \circ Q$ et $Q \circ P$.
8. (2 pts) Effectuer la division euclidienne de $X^3 + X + 2$ par $2X + 1$.
9. (2 pts) Pour quels réels $x$ l'expression $\ln\left(\frac{2-x^2}{(x+1)^2}\right)$ a-t-elle un sens ?
10. (2 pt) Soit $\phi : K[X] \to K[X], P \mapsto P'$ l'application de dérivation. Montrer qu'elle est surjective, puis qu'elle n'est pas injective.
11. (4 pts) Factoriser $P = X^4 - X^2 + 1$ sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$. Est-il scindé sur $\mathbb{C}$ ? Et sur $\mathbb{R}$ ?
12. (4 pts) Soit $P = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$.
    (a) Calculer $P(1)$ et $P(i)$. Que peut-on en déduire sur 1 et $i$ ?
    (b) Que peut-on en déduire *de plus* sur les racines de $P$ ?
    (c) Factoriser le polynôme sur $\mathbb{R}$. Est-il scindé sur $\mathbb{R}$ ?
    (d) Terminer la factorisation sur $\mathbb{C}$. Est-il scindé sur $\mathbb{C}$ ?
13. (6 pts) Comme promis. Soit $P$ le polynôme $P(X) = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.
    (a) Montrer que $j$ est une racine de $Q(X) = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$ et déterminer l'ordre de multiplicité. On rappelle que $j^3 = 1$.
    (b) Montrer que ceci détermine toutes les racines complexes de $Q$.
    (c) Décomposer $Q$ en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
    (d) En utilisant $j^4 = j$, en déduire la décomposition de $P$ sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.
14. (3 pts) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A = X^n$, et $B = X^2 - 2X + 1$. La division euclidienne de $A$ par $B$ s'écrit $A = BQ + R$. Que peut-on dire du degré de $R$ ? Calculer $R$, par exemple en utilisant la formule du cours.