Interrogation no. 4. Correction

1–5. Cours.

6. L'équivalence entre (a) et (b) est faite en cours. Pour montrer (b)$\Leftrightarrow$(c), écrivons la formule de Taylor pour P en α : on a

$$P = \sum_{k=0}^{deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = P(\alpha) + (X-\alpha)\left(P'(\alpha) + \sum_{k=2}^{deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^{k-1}\right).$$

Sous cette forme, il est immédiat que (b) est équivalent à (c).

7. Soit $P = X^2+X+1$ et $Q = 2X-3$. Alors, $P \circ Q = P(Q) = (2X-3)^2+(2X-3)+1 = 4X^2-10X+7$ et $Q \circ P = Q(P) = 2(X^2+X+1)-3 = 2X^2+2X-1$.

8. La division euclidienne donne $X^3+X+2 = (2X+1)(X^2/2 - X/4 + 5/8) + 11/8$.

9. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'expression $\ln\left(\frac{2-x^2}{(x+1)^2}\right)$ a un sens ssi ($x \neq -1$ et $2-x^2 > 0$), autrement dit ssi $x \in]-\sqrt{2}, -1[\cup]-1, \sqrt{2}[$.

10. Soit $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$ un polynôme. Alors P est le polynôme dérivé de $Q = 1729 + \sum_{K\in\mathbb{N}} a_k \frac{X^{k+1}}{k+1}$ (par exemple). Ceci montre que la dérivation est surjective. Elle n'est pas injective car les deux polynômes (distincts) 1 et 0 ont le même polynôme dérivé (0).

11. Soit $P = X^4 - X^2 + 1$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors $P(\alpha) = 0$ si et seulement si α^2 est racine de $X^2 - X + 1$. Les racines de ce dernier polynôme sont connues (ou faciles à calculer) : ce sont $e^{i\pi/3}$ et son conjugué $e^{-i\pi/3}$. Les deux racines carrées de $e^{i\pi/3}$ sont $e^{i\pi/6}$ et $e^{i7\pi/6}$; celles de $e^{-i\pi/3}$ sont $e^{-i\pi/6}$ et $e^{5i\pi/6}$. Ces quatre nombres complexes sont donc les racines de P, qui se factorise donc sur $\mathbb{C}$ de la façon suivante :

$$P = (X - e^{i\pi/6})(X - e^{7i\pi/6})(X - e^{-i\pi/6})(X - e^{5i\pi/6}).$$

En regroupant les racines conjuguées on en déduit la factorisation sur $\mathbb{R}$:

$$P = (X^2 - X\sqrt{3} + 1)(X^2 + X\sqrt{3} + 1).$$

Le polynôme P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ car il a des racines complexes non réelles. Il est scindé sur $\mathbb{C}$ car tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$.

12. Soit $P = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$.
(a) On a $P(1) = 6$ et $P(i) = i^4 + i^3 + 2i^2 + i + 1 = 0$. Donc i est racine, mais pas 1.
(b) Comme P est réel, ses racines sont conjuguées, donc $-i$ est également racine de P.
(c) On en déduit que $(X-i)(X+i) = X^2+1$ divise P. Pour trouver l'autre facteur, on effectue la division euclidienne de P par X^2+1. On obtient $P = (X^2+1)(X^2+X+1)$.

Ceci est la factorisation sur $\mathbb{R}$ car les deux facteurs X^2+1 et X^2+X+1 sont irréductibles sur $\mathbb{R}$. Le polynôme n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ car il a des racines complexes non réelles.
(d) La factorisation sur $\mathbb{C}$ est $P=(X-i)(X+i)(X-j)(X-\bar{j})$. Le polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$ car tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$.

13. Soit $P=X^8+2X^6+3X^4+2X^2+1$ et $Q=X^4+2X^3+3X^2+2X+1$.
(a) On a $Q(j)=j^4+2j^3+3j^2+2j+1=j+2+3j^2+2j+1=3(1+j+j^2)=0$. D'autre part, on a $Q'=4X^3+6X^2+6X+2$, et on a également $Q'(j)=0$. Enfin, $Q''=12X^2+12X+6$, et $Q''(j)=-6\neq 0$. Finalement, j est racine double de Q.
(b) Comme Q est réel, $\bar{j}=j^2$ est également racine de Q avec même multiplicité (cours). Ceci fournit toutes les racines de Q sur $\mathbb{C}$, puisqu'il est de degré 4.
(c) La factorisation de Q sur $\mathbb{C}$ est $Q=(X-j)^2(X-\bar{j})^2$. Celle sur $\mathbb{R}$ est donc, en regroupant les racines conjuguées : $Q=(X^2+X+1)^2$.
(d) Comme $P=Q(X^2)$, on a $P=(X^4+X^2+1)^2=(X^2+X+1)^2(X^2-X+1)^2$. (La factorisation de X^4+X^2+1 a été faite en TD.)

14. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note $A=X^n$, et $B=X^2-2X+1=(X-1)^2$. La division euclidienne de A par B s'écrit $A=BQ+R$. Le reste R est de degré <2, et il est donné par la formule du cours : $R=A(1)+A'(1)(X-1)=nX+1-n$.

Si on ne veut pas utiliser la formule du cours, voici comment faire (et cette méthode s'adapte aux cas non traités par le cours) : on sait qu'il existe deux réels a et b tels que $R=aX+b$. En évaluant la relation $A=BQ+R$ en 1, il vient $A(1)=R(1)$, donc $a+b=A(1)=1$. Ensuite, dérivons la relation, ce qui donne $A'=B'Q+BQ'+R'$, et évaluons à nouveau en 1. Comme 1 est racine double de B, il est également racine de B'. On obtient $a=A'(1)=n$. De là on tire $b=1-n$.