

## Interro 6 bis : corrigé de certaines questions et remarques

Question 8 : on a  $A^4 = 2A + I_n \Leftrightarrow A^4 - 2A = I_n$ . D'une part,  $A^4 - 2A = I_n \Leftrightarrow A \times A^3 - A \times 2I_n = I_n \Leftrightarrow A(A^3 - 2I_n) = I_n$ . D'autre part  $A^4 - 2A = I_n \Leftrightarrow A^3 \times A - 2I_n \times A = I_n \Leftrightarrow (A^3 - 2I_n)A = I_n$ . On en déduit que  $A$  est inversible et son inverse est  $A^3 - 2I_n$ . Vous *devez* vérifier les deux conditions d'inversibilité, ou alors je veux une preuve que si  $AB = I_n$ , alors  $BA = I_n$  également. En l'absence de cette preuve, le raisonnement est faux.

Question 9 : on a  $A^2 = 3A \Leftrightarrow A^2 - 3A = 0_n \Leftrightarrow A(A - 3I_n) = 0_n$ . Il y a plusieurs cas : si  $A = O_n$ , alors elle est bien sûr non inversible. Si  $A - 3I_n = 0_n$ , alors  $A = 3I_n$  donc elle est clairement inversible. Et sinon, les deux facteurs sont non nuls et leur produit est nul, donc  $A$  est un diviseur de zéro, donc non inversible par le cours.

Vu les dernières copies, à partir de maintenant il y aura systématiquement des points négatifs dans les cas suivants :

1. Phrase qui veut rien dire.
2. Utilisation incorrecte des équivalences, comme abréviation de « donc », pas exemple.
3. Fautes de logique graves, du type confondre « si une matrice a une ligne nulle elle n'est pas inversible », et « une matrice non inversible a une ligne nulle ».
4. Symboles non définis.
5. Division par zéro.

Et, en ce qui concerne les matrices :

6. Notation  $M^{-1}$  avant d'avoir montré que  $M$  était inversible, lorsque  $M$  est une matrice carrée.
7. Raisonnements du type : «  $AB = O_n$ , donc soit  $A = O_n$  soit  $B = 0_n$  », ou bien « Comme  $A \neq 0_n$ , on a  $AB = AC \Leftrightarrow B = C$  », avec  $A$ ,  $B$  et  $C$  des matrices carrées. L'algèbre  $M_n(K)$  n'est pas intègre, exemples dans le cours.
8. Raisonnements qui sous-entendent que  $AB = BA$ , lorsque  $A$  et  $B$  sont des matrices quelconques. L'algèbre  $M_n(K)$  n'est pas commutative.
9. Définitions et utilisations fantaisistes du déterminant et du polynôme caractéristique en dimension 3 ou plus, sachant que ça n'a pas été fait en cours.

Remarque finale : évitez la formulation « on pose... », la plupart du temps c'est utilisé de façon incorrecte. Si le symbole est introduit par l'énoncé, vous ne « posez » pas ; sinon, il vaut mieux l'introduire avec « soit machin (tel que...) ».