Université de Lorraine
Géométrie 3d — Examen
Documents, calculatrices et téléphones interdits

Dans tout le sujet, $\mathcal{E}$ désigne l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel et de la base canonique $\mathcal{B}$ orthonormée directe. L'origine est notée O.

1. Questions de cours.
   (a) Soit G un groupe et H un sous-groupe. Définir les classes à gauche pour H.
   (b) Montrer que toute classe à gauche est en bijection avec H.
   (c) Donner la définition d'une opération d'un groupe G sur un ensemble X.
   (d) Dans ce contexte, définir le stabilisateur $Stab(x)$ d'un élément $x \in X$ et son orbite $Orb(x)$.
   (e) Prouver que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$, avec n un entier.
   (f) Soit X un ensemble et $\sigma, \phi \in S_X$ deux bijections (permutations) de X. Montrer que $Supp(\sigma \circ \phi) \subset Supp(\sigma) \cup Supp(\phi)$.
   (g) Montrer que deux permutations à support disjoint commutent.
   (h) On suppose X fini. Définir les transpositions et démontrer que les transpositions engendrent S_X.
   (i) On considère la permutation $\sigma \in S_8$ définie comme suit :

$$\sigma(1) = 7;\ \sigma(2) = 8;\ \sigma(3) = 1;\ \sigma(4) = 2;$$

$$\sigma(5) = 4;\ \sigma(6) = 6;\ \sigma(7) = 3;\ \sigma(8) = 5.$$

   Calculer sa signature (en la décomposant en cycles).
2. Soient p et$q$ des nombres premiers distincts, et G un groupe abélien d'ordre pq. Montrer que G est cyclique.
3. Soit $\mathcal{P}$ un parallélogramme (d'intérieur non vide) du plan euclidien, et G son groupe d'isométries. Décrire G (cardinal, description des éléments, identification du groupe autrement dit isomorphisme avec un groupe connu) :
   (a) lorsque $\mathcal{P}$ est un carré, sans justifier (cours) ;
   (b) dans les autres cas (plus faciles) en justifiant.
4. Soient a, b, c des réels. Notons D la droite passant par $A = (a, b, c)$ dirigée par $(1, 2, 1)$, et D' la droite passant par $A' = (c, b, a)$ et dirigée par $(2, 1, 2)$. À quelle condition sur (a, b, c) les droites sont-elles coplanaires ? Dans ce cas, quelle est l'équation du plan ?
5. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles de $\mathcal{E}$ non coplanaires et tangents en un point. Montrer qu'ils sont contenus dans une sphère.
6. Soit $v = (a, b, c)$ un vecteur unitaire.
   (a) Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de la réflexion orthogonale par rapport au plan d'équation $ax + by + cz = 0$.
   (b) Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme $u \mapsto v \wedge u$.

(c) Décrire l'endomorphisme de matrice

$$M = \begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix}.$$

7. Décrire les trois endomorphismes de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont les suivantes :

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

8. Soit $\mathcal{C}$ le cube de $\mathbb{R}^3$ dont les sommets ont pour coordonnées $(\pm 2\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2})$. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+y+z=0$. On note enfin $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ les vecteurs de coordonnées $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$ et $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(-1/2,-1/2,1)$. Le plan vectoriel euclidien $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
   (a) Donner les équations dans $\mathcal{R}$ des six plans d'appui du cube. Décrire $\mathcal{C}$ par un système d'inégalités.
   (b) Donner les équations <u>dans $\mathcal{R}'$</u> des droites intersections des plans d'appui avec $\mathcal{P}$. Décrire $\mathcal{P} \cap \mathcal{C}$ par des inégalités de coordonnées dans le repère $\mathcal{R}'$.
   (c) Dessiner sur papier millimétré l'intersection du cube avec $\mathcal{P}$ (hachurer $\mathcal{P} \cap \mathcal{C}$, échelle : 1cm, on donne $\sqrt{3} \sim 1.73$).

9. Soit $\mathcal{O} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad |x|+|y|+|z| \leq 9\}$. C'est un octaèdre régulier.
   (a) Donner sans preuve les coordonnées des sommets.
   (b) Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $-4x-7y+4z=1$. Compléter le vecteur $u = \frac{1}{9}(8,-4,1)$ en une base orthonormée (u,v) de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, puis en une base orthonormée (u,v,w) de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. On note $\mathcal{B}'$ cette nouvelle base, et $\mathcal{R}'$ le repère $(O, \mathcal{B}')$ de $\mathcal{E}$.
   (c) Donner les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ des sommets de l'octaèdre.
   (d) Dessiner sur papier millimétré, en justifiant les calculs, la projection orthogonale de $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{P}$ (échelle : 1cm).

10. (a) Soient a, b et c trois nombres réels tels que $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ soit la matrice dans $\mathcal{B}$ d'une rotation. Quel est son axe ?
   (b) Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}+1 & -\sqrt{3}+1 \\ -\sqrt{3}+1 & 1 & \sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}+1 & -\sqrt{3}+1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Montrer que f est une rotation que l'on caractérisera.
   (c) Montrer que les rotations qui sont du type défini en (a) forment un groupe. Est-ce un groupe fini ou infini ? On pourra commencer par décrire l'ensemble des triplets $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ correspondants à ces rotations.

Université de Lorraine
Géométrie 3d — Correction (parfois rapide).

1. Cours
2. Il suffit de trouver un élément γ d'ordre pq dans G. D'après le théorème de Cauchy, il existe un élément α d'ordre p et un élément β d'ordre q. Soit $\gamma = \alpha\beta$ (qui n'est pas égal à e, sinon on aurait $\alpha = \beta^{-1}$ ce qui entrainerait $p = q$, absurde). Si $n \in \mathbb{N}$, la commutativité de G entraîne $\gamma^n = (\alpha\beta)^n = \alpha^n\beta^n$. On en déduit $\gamma^{pq} = \alpha^{pq}\beta^{pq} = e$, donc l'ordre de γ divise pq donc vaut p, q ou pq. Or si $\gamma^p = e$, alors $(\alpha\beta)^p = e$ donc $\beta^p = e$ d'où p multiple de q, absurde. L'ordre de γ n'est pas q pour la même raison. Donc γ est d'ordre pq ; le sous-groupe de G engendré par γ (qui est monogène et fini donc cyclique) est de cardinal pq, donc est égal à G en entier, qui est donc cyclique.
3. Notons $ABCD$ le parallélogramme. On note O son centre que l'on prend pour origine. Une isométrie stabilisant $ABCD$ fixe O et donc est une isométrie vectorielle. Si P et Q sont deux points, on note σ_{PQ} la réflexion orthogonale fixant la droite (PQ). On note s ouu $-\mathrm{Id}$ la symétrie de centre O. Le groupe G contient toujours $\pm\mathrm{Id}$. Ensuite on distingue quatre cas.
   (a) Si $ABCD$ est un carré, cours : G est de cardinal huit, il contient quatre symétries orthogonales suivant les diagonales et les médiatrices des côtés, et quatre rotations de centre 0 et d'angle $k\pi/2$, $0 \leq k \leq 3$. On l'appelle le groupe diédral d'ordre huit.
   (b) Rectangle. On a $|G| \geq 4$ car il contient les deux réflexions suivant les médiatrices des côtés et $\pm\mathrm{Id}$. Montrons qu'il n'y a pas d'autres éléments. Le groupe G opère sur l'ensemble X de cardinal 2 composé des deux diagonales [1]. Il y a une seule orbite, car une diagonale est envoyée sur l'autre par une des réflexions citées plus haut. Enfin, soit $\phi \in Stab_G([AC]) < G$. Alors l'isométrie ϕ induit une bijection des points extrémaux de la diagonale, donc soit elle fixe A et C, soit elle les échange. Dans le premier cas, elle fixe la droite (AC), c'est donc Id ou alors σ_{AC} mais cette dernière ne stailise pas le rectangle, donc $\phi = \mathrm{Id}$. Dans le second cas, en considérant la composition $s \circ \phi$ par la symétrie centrale de centre O on se ramène au premier cas, d'où $s \circ \phi = Id$ et donc $\phi = s$ est la symétrie centrale. Le stabilisateur est donc $\pm\mathrm{Id}$, d'où on tire $|G| = |Orb(d)| \times |Stab_G(d)| = 2 \times 2 = 4$. Il n'y a donc pas d'autres éléments que ceux cités plus haut. D'autre part, on voit que tous les éléments sont d'ordre deux, il n'y a pas d'élément d'ordre quatre, donc $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
   (c) Losange. On a $|G| \geq 4$ car il contient les deux réflexions orthogonales suivant les diagonales en plus de $\pm\mathrm{Id}$. Le groupe G agit sur l'ensemble X des quatre sommets. Deux sommets opposés sont dans la même orbite car ils sont envoyés l'un sur l'autre par $-\mathrm{Id}$. Par contre deux sommets non opposés ne sont pas dans la même orbite car leur distance à l'origine est différente. Il y a donc deux orbites chacune de cardinal deux. Enfin, le stabilisateur d'un sommet S est de cardinal deux, il contient l'identité et la réflexion orthogonale suivant la droite (OS). On en déduit que $|G| = |Orb(d)| \times |Stab_G(d)| = 2 \times 2 = 4$. Pour les mêmes raisons que plus haut, $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
   (d) Parallélogramme. Le groupe G agit sur les sommets. Pour les mêmes raisons que plus haut, deux sommets sont dans la même orbite si et seulement s'ils sont opposés. Soit S un sommet, et ϕ une isométrie de $\mathcal{P}$ fixant S. Soit T un sommet adjacent à S. Alors S

1. Par exemple. On peut également faire opérer sur les sommets, les arêtes, les drapeaux (sommet, arête adjacente) etc.

est envoyé sur un autre sommet à la même distance, donc en fait S est fixe. Alors, ϕ fixe une base donc est l'identité. Les stabilisateurs sont donc triviaux et donc G est de cardinal deux. Il est donc isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

4. Notons $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les deux plans contenant les deux cercles. Les deux cercles sont tangents en un point noté O. On note A et B les centres des cercles. Soit L_1 (resp. L_2) la perpendiculaires à $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$) passant par A (resp. B). Elles sont dans le plan OAB. Comme les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles, les droites perpendiculaires L_1 et L_2 non plus. Elles se coupent donc en un point G. Tous les points de $\mathcal{C}_1$ sont à même distance de G, égale à OG. Idem pour les points du deuxième cercle $\mathcal{C}_2$. Les deux points sont donc dans une sphère de centre G et de rayon OG. On peut aussi résoudre l'exercice en coordonnées, en prenant un repère judicieux.
5. Notons n un vecteur perpendiculaire à v et v', par exemple $n = (1, 0, -1)$. Les deux droites sont coplanaires si A' appartient au plan normal à n et passant par A. L'équation de ce plan est $x - z = a - c$. La CNS est donc $a - c = c - a$ autrement dit $a = c$. Dans ce cas l'équation du plan est $x - z = 0$.
6. (a) Soit p le projecteur sur la droite vectorielle dirigée par v. Alors p est donné par $p(x) = \langle v, x\rangle v = ({}^t v \cdot x)v = (v \cdot {}^t v) \cdot x$. Il a donc pour matrice $v \cdot {}^t v = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix}$. La matrice de symétrie suivant le plan $v^\perp$ est $I - 2p = \begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ba & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ca & -2cb & 1-2c^2 \end{pmatrix}$.

   (b) L'endomorphisme $\phi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) On voit que $f = p + \phi$. Le morphisme ϕ est de rang deux, son noyau est $\mathbb{R}v$, son image est le plan $v^\perp$ qui est stable et sa restriction à ce plan est une rotation d'angle $\pi/2$ d'axe $\mathbb{R}v$ (orienté par v). On en déduit que l'endomorphisme $f = p + \phi$ stabilise $\mathbb{R}v$ et $v^\perp$. Sa restriction à $\mathbb{R}v$ est l'identité, et sa restriction à $v^\perp$ est la rotation d'angle $\pi/2$. On en déduit que f est la rotation d'angle $\pi/2$ d'axe v.
7. (a) Le déterminant est -1 et la matrice est orthogonale. C'est la composée d'une rotation suivant un vecteur et une réflexion suivant l'orthogonal de ce vecteur. L'angle vérifie $2\cos(\theta) - 1 = 1$ autrement dit $\theta = 0$, donc c'est juste une réflexion orthogonale suivant un plan orthogonal à un vecteur anti-fixe, par exemple $(1, 2, 3)$.

   (b) C'est l'endomorphisme précédent composé par $-Id$. On en déduit que c'est la rotation d'axe $(1, 2, 3)$ et d'angle π.

   (c) Le déterminant est nul. La matrice est symétrique de rang un, on reconnait le projecteur sur la droite dirigée par $(1, 2, -3)$, ou alors on fait les calculs.
8. (a) Les six plans d'appuis ont pour équations $x = \pm 2\sqrt{2}$, $y = \pm 2\sqrt{2}$ et $z = \pm 2\sqrt{2}$. Le cube est décrit par les inéquations :

$$\begin{cases} -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \leq y \leq 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \leq z \leq 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

(b) Soit $M \in \mathcal{P}$, de coordonnées (a, b) dans $\mathcal{R}'$ (Autrement dit, $\overrightarrow{OM} = a.u + b.v$). Alors M a pour coordonnées dans $\mathcal{R}$:

$$\left(\frac{-a}{\sqrt{2}} - \frac{b\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

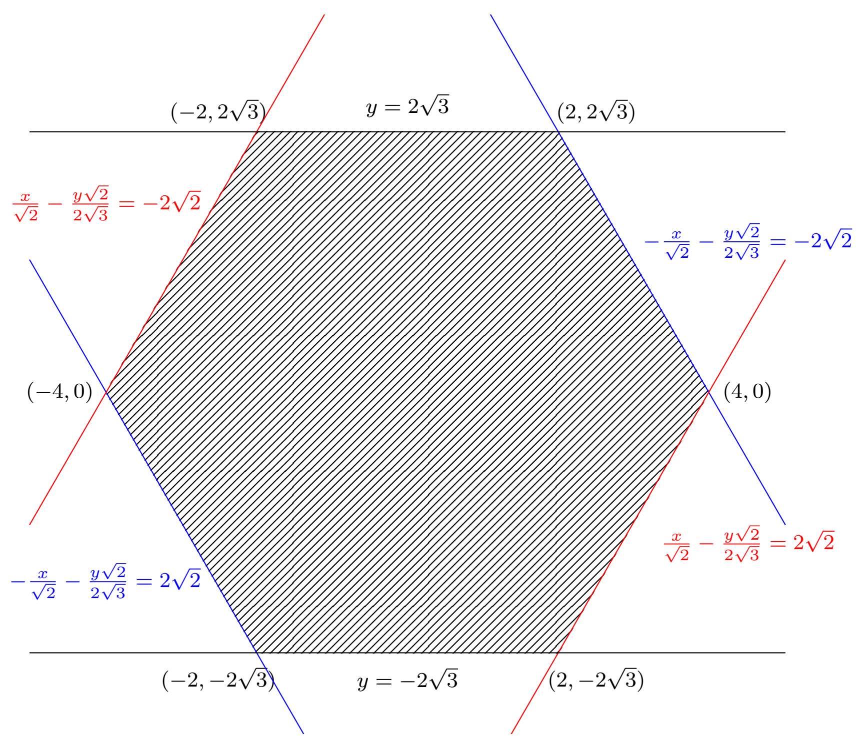
Les intersections des six plans d'appui avec $\mathcal{P}$ ont donc pour équations dans $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$:

$$\frac{-a}{\sqrt{2}} - \frac{b\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \pm 2\sqrt{2},\ \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \pm 2\sqrt{2},\ \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm 2\sqrt{2}.$$

Par conséquent, l'intersection $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$ est décrite par le système d'inéquations :

$$\begin{cases} -2\sqrt{2} \leq \frac{-a}{\sqrt{2}} - \frac{b\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \leq 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \leq \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \leq 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \leq \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \leq 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

(c) On obtient l'hexagone régulier suivant.

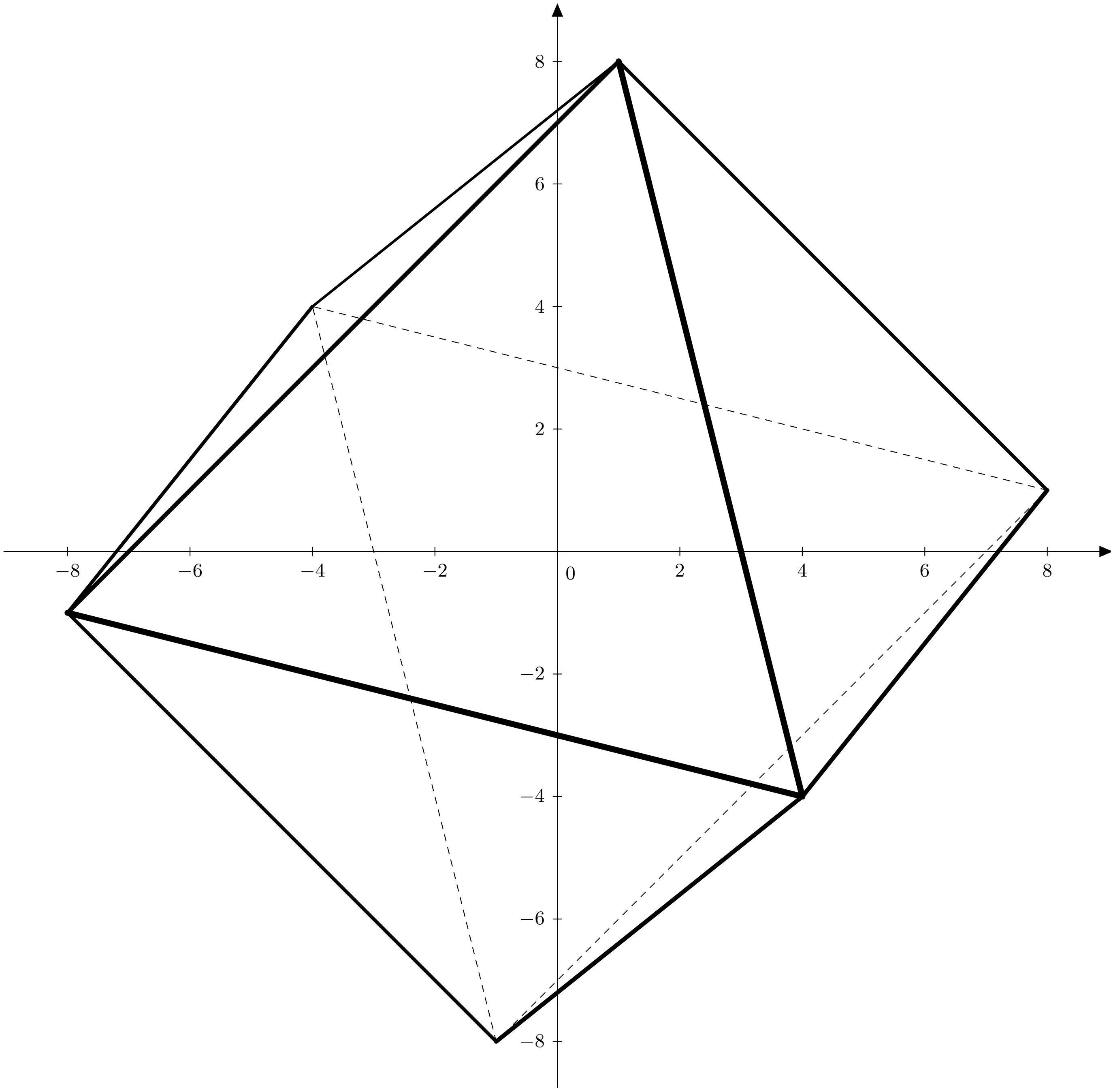


9. L'octaèdre

(a) Les sommets sont $(0, 0, \pm 9)$, $(0, \pm 9, 0)$ et $(\pm 9, 0, 0$.

(b) On trouve par exemple la base sont les vecteurs ont pour coordonnées $\frac{1}{9}(8, -4, 1)$, $\frac{1}{9}(1, 4, 8)$ et $\frac{1}{9}(-4, -7, 4)$.

(c) Soit $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$. Pour obtenir les coordonnées des sommets de l'octaèdre dans la base $\mathcal{B}'$, il suffit de multiplier leurs coordonnées par $M^{-1} = {}^tM$. Les coordonnées dans le plan s'obtiennet en oubliant la troisième composante de ces nouvelles coordonnées, ce qui donne le dessin suivant :



10. On note $M(a, b, c)$ la matrice de l'énoncé. Ceci définit une application

$$M : \mathbb{R}^3 \to M_3(\mathbb{R}).$$

On voit tout de suite que le vecteur $(1,1,1)$ est propre pour la valeur propre $a+b+c$. Calculons cette valeur.

(a) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Si $M(a,b,c) \in O(3)$, alors $a^2+b^2+c^2 = 1$ et $ab+bc+ca = 0$. Dans ce cas, $(a+b+c)^2 = 1$. Si de plus $M(a,b,c) \in SO(3)$, alors $det M(a,b,c) = 1 = a^3+b^3+c^3-3abc$. Alors, $0 = (ab+bc+ca)(a+b+c) = 3abc+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) = (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)-1$, d'où $a+b+c = 1$. Si la matrice n'est pas triviale, c'est une rotation d'axe dirigé par $(1,1,1)$. Son angle vérifie $\cos(\theta) = (3a-1)/2$.

(b) C'est une rotation d'angle $-\pi/2$ et d'axe $(1,1,1)$.

(c) L'ensemble G demandé est l'intersection de $SO(3)$ avec l'image de M. En notant $\mathcal{C}$ le cercle intersection de la sphère unité et du plan $a+b+c=1$, on a déjà montré à la première question :

$$(a,b,c) \in \mathcal{C} \Leftarrow M(a,b,c) \in SO(3).$$

Réciproquement, soit $(a,b,c) \in \mathcal{C}$. Alors $ab+bc+ca = \frac{1}{2}((a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)) = 0$ donc la matrice est orthogonale, et de façon similaire $a^3+b^3+c^3-3abc = 1$. Finalement :

$$(a,b,c) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow M(a,b,c) \in SO(3).$$

On en déduit que G est en bijection avec $\mathcal{C}$, il est donc infini. C' est l'ensemble de toutes les rotations d'axe $(1,1,1)$: c'est manifestement un groupe.