Université de Lorraine **Faculté des Sciences et Techniques**

Licence de Mathématiques S4 *Année 2012/2013*

LCMA 4.21 : Géométrie dans l'espace et visualisation

Liste d'exercices n°2

I Repères :

1. Dans $\mathbb{R}^3$, écrire la formule du changement de coordonnées pour le passage du repère affine canonique O, I, J, K au repère K, J, I, O. Écrire la formule correspondante pour le passage inverse. Que remarque-t-on ?
2. Dans $\mathbb{R}^2$, écrire la formule de changement de coordonnées pour le passage du repère affine canonique O, I, J aux autres repères formés avec les 3 points O, I, J pris dans un ordre différent. Combien y a-t-il de possibilités ? Que se passe-t-il si on compare 2 de ces changements de repères ?
3. Pour les exercices 1 et 2, les bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ associées aux différents repères sont-elles orthonormées ?
4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les points $A = (-1, -1, -1)$, $B = (1, 1, -1)$, $C = (1, -1, 1)$ et $D = (-1, 1, 1)$. Écrire la formule du changement de coordonnées pour le passage du repère O, I, J, K au repère A, B, C, D.
   La base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est-elle orthonormée ? Sinon, préciser les normes de ses vecteurs et les angles entre eux.

II Plans, droites, figures :

5. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les 6 points I, J, K et $I' = (-1, 0, 0)$, $J' = (0, -1, 0)$, $K' = (0, 0, -1)$.
   (a) Écrire les équations des 8 plans :
   $$(*) \qquad (IJK)\ \ (I'J'K')\ \ (IJ'K)\ \ (I'JK')\ \ (IJK')\ \ (I'J'K)\ \ (I'JK)\ \ (IJ'K')$$
   Lesquels de ces plans sont parallèles ? Avec les intersections de ces plans, combien obtient-on de droites ?
   (b) On note Oct l'ensemble formé de tous les points $X = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ qui sont du même côté que l'origine $O = (0, 0, 0)$ par rapport à tous les plans de $(*)$. Définir Oct par des inéquations sur les coordonnées. Montrer que tous les points de Oct sont à distance (strictement) inférieure à 1 de l'origine O.
   (c) Montrer qu'il y a d'autres plans contenant au moins 3 des 6 points I, J, K, I', J', K'. Combien y a-t-il de tels plans ? Si on enlève ces plans, en combien de régions divise-t-on Oct ?
   (d) Quelles sont les longueurs des segments définis par 2 des 6 points I, J, K, I', J', K' ? Que peut-on dire des triangles définis par les triplets de points de $(*)$?

6. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le repère canonique O, I, J, K. Donner l'équation des 4 plans (OIJ), (OIK), (OJK) et (IJK).
   (a) Si on enlève ces 4 plans à $\mathbb{R}^3$, combien va-t-il y avoir de régions distinctes ?
   (b) Décrire ces régions avec des inéquations. Vérifier le nombre de régions obtenues.
   (c) Faire une figure et indiquer les régions sur la figure.
   (d) Montrer qu'il y a une unique région *bornée*, c'est à dire telle qu'il existe un réel R tel que tout point de la région soit à distance inférieure ou égale à R d'un point fixé (par exemple l'origine O).
   (e) Écrire des équations, puis un paramétrage pour les droites définies comme intersections des 4 plans donnés.
   (f) Déterminer la nature des triangles OIJ, OIK, OJK et IJK.
7. On considère une base $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et les 3 points U, V et W tels que $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{OW} = \overrightarrow{w}$.
   On note $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un point X de $\mathbb{R}^3$ dans le repère O, U, V, W. On appelle Par l'ensemble des points dont les coordonnées X' vérifient $0 \leq x' \leq 1$, $0 \leq y' \leq 1$ et $0 \leq z' \leq 1$.
   Montrer que, comme dans les exercices précédents, l'ensemble Par peut être décrit comme une région délimitée par 6 plans. Montrer que cette région est bornée (voir exercice 6d).
8. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les points de coordonnées $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ pour tous les signes possibles.
   (a) Combien y a-t-il de points ? Combien de plans et de droites peut-on définir directement à partir de ces points ? (Il n'est pas interdit de faire une figure)
   (b) Écrire précisément les équations de ces plans et de ces droites. Trouver tous les cas de parallélisme.
9. On considère le point $K = (0, 0, 1)$.
   (a) Trouver 3 points A, B, C tels que :
      (i) les distances KA, KB, KC, AB, BC, CA sont toutes égales,
      (ii) A est dans le plan xOz, c'est à dire sa deuxième coordonnée est nulle, et de plus sa première coordonnée est strictement positive,
      (iii) le plan (ABC) est parallèle au plan d'équation $z = 0$,
      (iv) O est le centre des gravité des 4 points K, A, B, C.
   (b) Donner les équations des plans (KAB), (KBC), (KCA) et (ABC) et de leurs droites d'intersection.