Liste d'exercices n°3

1. Soient $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans parallèles et distincts de l'espace $\mathcal{E}$.
   (a) Montrer qu'il existe un repère *orthonormé* dans lequel les équations de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont respectivement : pour $(\mathcal{P})$ $z = -\frac{a}{2}$ et pour $(\mathcal{P}')$ $z = \frac{a}{2}$ avec un réel $a > 0$.
   (b) Soit A un point de $(\mathcal{P})$. Montrer que, pour tout B dans $(\mathcal{P}')$, on a $d(A, B) \geq a$.
   (c) Montrer que, si A est fixé dans $(\mathcal{P})$, il existe un unique point A' de $(\mathcal{P}')$ tel que $d(A, A') = a$.
   (d) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ ne dépend pas du choix de A.

2. Soient $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans sécants distincts de l'espace $\mathcal{E}$.
   (a) Montrer qu'il existe un repère *affine* dans lequel les équations de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont respectivement : pour $(\mathcal{P})$ $z = 0$ et pour $(\mathcal{P}')$ $y = 0$.
   (b) Montrer qu'il existe un repère *orthonormé* dans lequel les équations de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont respectivement : pour $(\mathcal{P})$ $z = 0$ et pour $(\mathcal{P}')$ $y.sin\theta - z.cos\theta = 0$, où θ est l'angle de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ qui vérifie $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Montrer que $\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}}^{\perp} \cap \overrightarrow{\mathcal{P}'} \neq \{\overrightarrow{0}\}$.

3. Soient $(\mathcal{P})$ un plan et $(\mathcal{D})$ une droite de l'espace $\mathcal{E}$.
   (a) Trouver un repère *affine* dans lequel les équations de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$ sont les plus simples possibles. [On distinguera les cas où $(\mathcal{D})$ est parallèle à $(\mathcal{P})$ et où $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants.]
   (b) Même question avec un repère *orthonormé*.

4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le repère canonique O, I, J, K et trois points A, B, C tels que :
   A est sur la droite (OK) et $A \neq O$, $A \neq K$.
   B est sur la droite (IK) et $B \neq I$, $B \neq K$.
   C est sur la droite (JK) et $C \neq J$, $C \neq K$.
   On note respectivement α, β, γ la *troisième* coordonnée de A, B, C. On supposera pour simplifier que α, β, γ sont distincts.
   (a) Écrire les coordonnées de A, B, C.
   (b) Écrire un paramétrage, puis une paire d'équations pour chacune des droites (AB), (AC) et (BC).
   (c) Montrer que (AB) et (OI) se coupent en un point P dont on calculera les coordonnées. Même question pour $(AC) \cap (OJ) = \{Q\}$ et $(BC) \cap (IJ) = \{R\}$.
   (d) Montrer que P, Q, R sont alignés sur une droite $\mathcal{D}$.
   (e) Calculer l'équation du plan (ABC) et vérifier que ce plan contient $\mathcal{D}$.

(f) Redémontrer les résultats de (d) et (e) sans calcul.

5. On considère la projection orthogonale de l'espace $\mathcal{E}$ sur un plan $\mathcal{P}$; on note M' l'image du point M. Pour 2 points A et B, on note $\overrightarrow{H_{AB}} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{BB'}$. Ainsi l'écriture $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{H_{AB}}$ est la décomposition unique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ en un vecteur parallèle à $\mathcal{P}$ et un vecteur orthogonal à $\mathcal{P}$.

   On considère 3 points A, B, C de $\mathcal{E}$, distincts et de projections distinctes.

   (a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{H_{AB}}.\overrightarrow{H_{AC}}$.

   (b) On considère les 3 conditions suivantes :

      (i) l'angle des droites (AB) et (AC) est droit,

      (ii) l'angle des droites $(A'B')$ et $(A'C')$ est droit,

      (iii) l'une des droites (AB) ou (AC) est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

      Montrer que si 2 de ces conditions sont vérifiées, alors la troisième l'est aussi.

6. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace $\mathcal{E}$. On note x, y, z les coordonnées d'un point dans ce repère. Soient $\mathcal{D}_1$ la droite d'équations $y = 0$ et $z = \frac{1}{2}$ et $\mathcal{D}_2$ la droite d'équations $x = 0$ et $z = -\frac{1}{2}$.

   (a) Déterminer un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$, puis un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$.

   (b) Soit $\mathcal{K}$ la droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{k}$. Montrer que $\mathcal{K}$ coupe $\mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}_2$) en un point K_1 (resp. K_2) dont on calculera les coordonnées. Montrer que O est le milieu de K_1 et K_2.

   (c) Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites non parallèles et non sécantes. Montrer qu'il existe un repère $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ de $\mathcal{E}$ dans lequel Δ_1 admet pour équations $\begin{cases} Y = 0 \\ Z = \frac{1}{2} \end{cases}$, et Δ_2 admet pour équations $\begin{cases} X = 0 \\ Z = -\frac{1}{2} \end{cases}$, où X, Y, Z désignent les coordonnées d'un point dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$.

7. Soient A, B, C, D quatre points de l'espace affine $\mathcal{E}$ formant un repère. Soit A' (resp. B', C', D') un point de la droite (AB) (resp. $(BC), (CD), (DA)$), distinct de A et B (resp. de B et C, de C et D, de D et A). Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

   $i)$ A', B', C', D' appartiennent à un même plan,

   $ii)$ on a $\quad \dfrac{\overline{AA'}}{\overline{BA'}} \cdot \dfrac{\overline{BB'}}{\overline{CB'}} \cdot \dfrac{\overline{CC'}}{\overline{DC'}} \cdot \dfrac{\overline{DD'}}{\overline{AD'}} = 1.$

8. (a) Soient $\mathcal{P}$ un plan de l'espace euclidien $\mathcal{E}$, et M un point de $\mathcal{E}$. Soit P la projection orthogonale du point M dans le plan $\mathcal{P}$. Montrer que $MP = \inf_{\mathrm{Q} \in \mathcal{P}} \mathrm{MQ}$. La valeur correspondante est appelée la *distance* du point M au plan $\mathcal{P}$.

   (b) Soient $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ une base de l'espace directeur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{P}$, $Q \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Montrer les formules :

$$MP = \frac{|det(\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})|}{\|\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}\|} = \frac{|\overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}.$$

(c) On fixe un repère orthonormé $0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ de $\mathcal{E}$. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y - z = 1$, et le point M de coordonnées $(1, -1, 2)$. Calculer la distance de M au plan $\mathcal{P}$.

9. Soient $\mathcal{P}$ un plan, A et B deux points pris hors du plan $\mathcal{P}$. On considère la fontion $f : \mathcal{P} \longrightarrow [0, +\infty[$ définie par $f(M) = AM + BM$.

   (a) On suppose que A et B sont situés de part et d'autre du plan $\mathcal{P}$. Déterminer le minimum de f et le point M pour lequel il est atteint.

   (b) On suppose que A et B sont situés dans un même demi-espace limité par $\mathcal{P}$. Déterminer le minimum de f et le point M pour lequel il est atteint.

10. Soient $\mathcal{E}$ l'espace euclidien, $\mathcal{P}$ un plan et $\mathcal{D}$ une droite contenue dans $\mathcal{P}$. Soit A un point pris hors de $\mathcal{P}$, soit B un point de $\mathcal{P}$ n'appartenant pas à $\mathcal{D}$, et C un point de $\mathcal{D}$. On suppose que la droite (AB) est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$, et que la droite (BC) est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$. Montrer que la droite (AC) est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$.