Université de Lorraine **Faculté des Sciences et Techniques**

Licence de Mathématiques S4 *Année 2012/2013*

LCMA 4.21 : Géométrie dans l'espace et visualisation

Liste d'exercices n°4

1. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les 4 points $A = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$, $B = (0,0)$, $C = (1,0)$ et $D = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Écrire la formule matricielle de l'unique application affine $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que : $f(O) = A$, $f(I) = B$, $f(J) = C$ et $f(K) = D$, où O, I, J, K est le repère canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace $\mathcal{E}$, I (resp. J, K) le point de coordonnées $(1,0,0)$ (resp. $(0,1,0)$, $(0,0,1)$). Soit $\mathcal{P}$ le plan contenant O, I, J. Soit $\overrightarrow{k'}$ un vecteur appartenant à $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, non proportionnel à $\overrightarrow{i}$ ou à $\overrightarrow{j}$.
   (a) Montrer qu'il existe α, β, γ tous distincts de 0 tels que : $\alpha \overrightarrow{i} + \beta \overrightarrow{j} + \gamma \overrightarrow{k'} = \overrightarrow{0}$, et que α, β, γ sont bien déterminés à un scalaire non nul près.
   (b) Soit K' le point de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{OK'} = \overrightarrow{k'}$. Montrer qu'il existe une unique application affine $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{P}$ telle que $f(O) = O, f(I) = I, f(J) = J, f(K) = K'$. Préciser son expression dans les repères $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de $\mathcal{E}$ et $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de $\mathcal{P}$.
   (c) Soit $\overrightarrow{D}$ la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\alpha \overrightarrow{i} + \beta \overrightarrow{j} + \gamma \overrightarrow{k}$. Soit p la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à la direction $\overrightarrow{D}$. Montrer que $f = p$.

3. Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace euclidien $\mathcal{E}$. On note σ la symétrie par rapport à $\mathcal{D}$.
   (a) Soient M et M' deux points de $\mathcal{E}$. Montrer que : $M' = \sigma(M)$ si et seulement si $\frac{M+M'}{2} \in \mathcal{D}$ et $\overrightarrow{MM'} \perp \mathcal{D}$.
   (b) On suppose la droite $\mathcal{D}$ donnée par les équations $x - y = 0$, $y + z = 0$. Déterminer un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
   (c) Comme $O \in \mathcal{D}$, σ est une transformation linéaire. Déterminer sa matrice.

4. Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace euclidien $\mathcal{E}$. On note σ la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$.
   (a) Soient M et M' deux points de $\mathcal{E}$. Montrer que : $M' = \sigma(M)$ si et seulement si $\frac{M+M'}{2} \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{MM'} \perp \mathcal{P}$.
   (b) Déterminer l'expression matricielle de σ pour $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z - 1 = 0$.

5. On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :
$$f(x,y,z) = (-y - z + 1, -2x - y - 2z + 2, x + y + 2z - 1)$$
   (a) Déterminer l'ensemble Δ des points fixes de f.
   (b) Soit $M = (x,y,z)$. Montrer que la direction du vecteur $\overrightarrow{Mf(M)}$ est indépendante du point M choisi puis que la droite $(Mf(M))$ coupe Δ en un (unique) point M' que l'on déterminera.

(c) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{Mf(M)}$ et $\overrightarrow{MM'}$. En déduire la nature de la transformation f.

6. Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 muni d'un repère orthonormé direct $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$, on considère la transformation linéaire f associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-\sqrt{6}}{4} \\ \frac{-\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que f est une rotation.

   (b) Déterminer un vecteur propre de la matrice A pour la valeur propre 1.

   (c) Déterminer l'axe et l'angle de la rotation f.

7. L'espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé.
On considère l'application $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ donnée par : $f(x, y, z) = (y, z, x)$.

   (a) Montrer que f est une isométrie. Préciser sa nature.

   (b) Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale s_1 par rapport au plan P_1 d'équation $x + y - 2z = 0$.

   (c) Dire pourquoi il existe une symétrie orthogonale s_2 par rapport à un plan P_2 telle que $f = s_2 \circ s_1$, et déterminer une équation de P_2.

8. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace $\mathcal{E}$. On considère un vecteur de norme 1 $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ et la droite Δ de repère $(O, \overrightarrow{v})$. On veut déterminer la formule de la rotation ρ d'axe Δ (orienté par $\overrightarrow{v}$) et d'angle θ.

   (a) Si $M = (x, y, z)$ est dans $\mathcal{E}$ et si H est sa projection orthogonale sur Δ, montrer que $\overrightarrow{OH} = \lambda\overrightarrow{v}$ avec $\lambda = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{v} = ax + by + cz$.

   (b) On note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{HM}$. Si $M' = \rho(M)$, montrer que $\overrightarrow{HM'} = cos\theta\overrightarrow{HM} + sin\theta\overrightarrow{u}$.

   (c) Montrer que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{OM}$ et en déduire une formule pour les coordonnées de M'.

9. Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Soient $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ et $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ deux bases (non nécessairement orthonormées) de E. On suppose les égalités suivantes de produits scalaires : $\forall i, j,\ 1 \leq i, j \leq 3, \quad \overrightarrow{u_i}.\overrightarrow{u_j} = \overrightarrow{v_i}.\overrightarrow{v_j}$. Montrer qu'il existe une unique isométrie vectorielle f de $\mathcal{E}$ telle que, pour tout $j,\ 1 \leq j \leq 3$, on a $f(\overrightarrow{u_j}) = \overrightarrow{v_j}$.

10. Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien. Soient (A_1, A_2, A_3, A_4) et (B_1, B_2, B_3, B_4) deux repères affines de $\mathcal{E}$. On suppose les égalités suivantes de distances : $\forall i, j,\ 1 \leq i, j \leq 4, \quad d(A_i, A_j) = d(B_i, B_j)$. Montrer qu'il existe une unique isométrie f de $\mathcal{E}$ telle que $\forall j,\ 1 \leq j \leq 4,\ f(A_j) = B_j$.

11. Dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé, on considère quatre points déterminés par leurs coordonnées : $A\ (1, 1, 1)$; $B\ (-1, 1, -1)$; $C\ (-1, -1, 1)$ et $D\ (1, -1, -1)$.

   (a) Montrer que ces 4 points sont les sommets d'un tétraèdre régulier. Faire un dessin en perspective cavalière.

(b) Déterminer les 12 isométries directes qui conservent ce tétraèdre. Pour chaque rotation, on précisera son axe, son angle et sa matrice.

(c) Les 12 isométries indirectes qui conservent ce tétraèdre sont six symétries planes et 6 symétries-rotations (d'angle $\pm\pi/2$), les identifier précisément.

(d) Vérifier que les 24 isométries ainsi trouvées correspondent bien à toutes les permutations de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ des sommets du tétraèdre (comme cela doit être le cas d'après l'exercice 10).