Université de Lorraine **Faculté des Sciences et Techniques**

Licence de Mathématiques S4 *Année 2012/2013*

LCMA 4.21 : Géométrie dans l'espace et visualisation

Liste d'exercices n°5

1. Considérons le groupe $\mathbb{Z}$ muni de la loi $+$. Étant donné un entier n, on définit $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ par $\phi : k \mapsto nk$. Quand est-il est injectif ? Surjectif ? Quelle est son image ?
2. Montrer que l'application de passage au quotient $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad, x \mapsto \overline{x}$ est un morphisme de groupe surjectif, et calculer son noyau.
3. Soit G un groupe noté multiplicativement, et $g \in G$. On définit l'application $\phi_g : \mathbb{Z} \to G$ par $\phi_g(k) = g^k$, avec la convention $g^0 = 1$, et, si $k < 0$, $g^k := (g^{-1})^{-k}$. Montrer que ϕ_g est un morphisme de groupe de $\mathbb{Z}$ dans G.
4. Réciproquement, montrer que tout morphisme de $\mathbb{Z}$ dans un groupe G est de ce type.
5. Cas particulier : soit $\phi : \mathbb{Z} \to G$ un morphisme de groupe non injectif, de noyau $n\mathbb{Z}$. Montrer que l'image est un sous-groupe de cardinal n isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
6. Montrer que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est isomorphe au produit $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.
7. Montrer que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas isomorphe au produit $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. (Étudier l'ordre des éléments)
8. Déterminer tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
10. Décrire tous les groupes d'ordre $2, 3, 4, 5$.
11. Soient x et y deux éléments de G. Montrer que xy et yx ont même ordre. Si x et y commutent et son d'ordre fini, montrer qu'il existe un élément d'ordre $ppcm(ordre(p), ordre(q))$.
12. Montrer qu'un groupe de cardinal 6 n'a pas que des éléments d'ordre deux.
13. Montrer qu'un groupe abélien d'ordre six est isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
14. Soient p et q des nombres premiers. Montrer qu'un groupe abélien d'ordre pq est cyclique.
15. Montrer qu'un groupe d'ordre pair a un nombre impair d'éléments d'ordre deux.
16. Savoir décomposer n'importe quelle permutation en produit de cycles disjoints. Savoir écrire la composée de deux permutations, savoir trouver le support. Savoir écrire n'importe quelle permutation comme produit de transpositions. Savoir calculer la signature d'une permutation.
17. Décrire tous les éléments de $\mathcal{S}_3$, donner leur ordre, dresser la table de multiplication de ses éléments. Trouver tous les sous-groupes de $\mathcal{S}_3$.
18. Soit $z = (a_1, ...a_k)$ un k-cycle, et σ une permutation. D'écrire le conjugué $\sigma z \sigma^{-1}$.
19. Montrer que $\mathcal{S}_3$ est engendré par le 3-cycle $(1, 2, 3)$ et la transposition $(1, 2)$. De facon générale, si $\tau \in \mathcal{S}_n$ est une transposition, montrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par le n-cycle $(1, 2, ..., n)$ et τ.
20. Trouver tous les groupes d'ordre six à isomorphisme près.