# Université de Lorraine
# Géométrie 3d — Partiel

Calculatrices, documents et accès réseau non autorisés
Noté sur plus de 20, notes tronquées à 20.

5 avril

1. Questions de cours
   (a) Soit $G$ un groupe et $H$ un sous-groupe. Définir les classes à gauche pour $H$.
   (b) Montrer que ces classes à gauche ont le même cardinal que $H$.
   (c) Définir l'ordre d'un élément $g \in G$.
   (d) Donner la définition d'une opération d'un groupe $G$ sur un ensemble $X$.
   (e) Dans ce contexte, définir le stabilisateur $Stab(x)$ d'un élément $x \in X$ et son orbite $Orb(x)$.
   (f) Rappeler l'application naturelle $G/Stab(x) \to Orb(x)$ et montrer qu'elle est bijective.
   (g) Soit $X$ un ensemble a plus de trois éléments, et $\mathfrak{S}_X = Bij(X)$ son groupe des permutations. Montrer que $\mathfrak{S}_X$ n'est pas commutatif.
   (h) Définir le support $Supp(\sigma)$ et les points fixes d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_X$.
   (i) Montrer que $Supp(\sigma \circ \phi) \subset Supp(\sigma) \cup Supp(\phi)$.
   (j) Montrer que deux permutations à support disjoint commutent.
   (k) On suppose $X$ fini. Expliquer brièvement comment démontrer que les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_X$ [1].
2. On note $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension trois dirigé par $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. On note $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base orthonormée directe de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ le repère affine orthonormé de $\mathcal{E}$. Soit $\Delta$ une droite de $\mathcal{E}$ et $H$ un plan. On note $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\Delta$ de norme un, et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $H$ de norme un. On note enfin $\pi_\Delta$ et $\pi_H$ les projecteurs orthogonaux sur $\Delta$ et $H$, et $s_\Delta$ et $s_H$ les symétries orthogonales par rapport à $\Delta$ et $H$ (qui les laissent donc invariants). On note enfin $\overrightarrow{\pi_\Delta}, \overrightarrow{\pi_H}, \overrightarrow{s_\Delta}, \overrightarrow{s_H}$ les applications linéaires associées.
   (a) Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$. Écrire $\overrightarrow{\pi_\Delta}(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{\pi_H}(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{s_\Delta}(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{s_H}(\overrightarrow{v})$ en fonction de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ (et de $\overrightarrow{v}$).
   (b) Écrire $\overrightarrow{s_\Delta}$ uniquement en fonction de $\overrightarrow{\pi_\Delta}$. Idem pour $\overrightarrow{s_H}$ en fonction de $\overrightarrow{\pi_H}$.

1. Bonus pour la preuve complète.

(c) Dans la suite, on note $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $\mathcal{R}$. On note ensuite $H = \{O + \lambda\overrightarrow{w_1} + \mu\overrightarrow{w_2},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ et $\Delta = \begin{cases} x + 2y - 3z & = 1 \\ x - y + z & = 2 \end{cases}$. Donner un vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n}$ pour $H$ et un vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{u}$ pour $\Delta$.

(d) Écrire les matrices de $\overrightarrow{\pi_\Delta}$ et $\overrightarrow{\pi_H}$, en déduire (ou recalculer) celles de $\overrightarrow{s_\Delta}$ et $\overrightarrow{s_H}$.

3. Cet exercice utilise les notations (mais pas les calculs) de l'exercice précédent.

   (a) On note $\overrightarrow{i'} = \dfrac{\overrightarrow{w_1}}{||\overrightarrow{w_1}||}$ et $\overrightarrow{j'} = \dfrac{\overrightarrow{w_2}}{||\overrightarrow{w_2}||}$. Calculer leurs coordonnées et montrer qu'ils sont orthogonaux. Dans la suite, $\overrightarrow{H}$ sera muni de la base orthonormée $(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$. Compléter en une base orthonormée directe $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'})$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Le nouveau repère associé de $E$ est noté $\mathcal{R}'$.

   (b) Écrire la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base, ainsi que son inverse.

   (c) Écrire la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ du projecteur orthogonal $\pi_H$.

   (d) On considère le cube $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ dont les sommets ont pour coordonnées $(\pm 3, \pm 3, \pm 3)$ dans $\mathcal{R}$. Calculer les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ des sommets de $\mathcal{C}$.

   (e) En déduire les coordonnées de leurs projections sur $H$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$.

   (f) Dessiner cette projection du cube (sommets et arêtes) sur le papier millimétré, dans le repère $(O, \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$, une unité valant un centimètre.

4. Reconnaître l'endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

   (Autrement dit, si c'est une isométrie ou un projecteur, orthogonal ou non, le préciser, et expliciter éventuellement les axes ou plans de symétrie ou de rotation, angles de projection ou de rotation relativement à un axe orienté etc.)

Correction.

1. Cours
2. (a) La formule $\overrightarrow{\pi_\Delta}(\overrightarrow{v}) = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle \overrightarrow{u}$ est dans le cours. Elle suffit pour retrouver les autres : $\overrightarrow{\pi_H}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} - \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n} \rangle \overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{s_\Delta}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} - 2(\overrightarrow{v} - \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle \overrightarrow{u})$ et $\overrightarrow{s_H}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} - 2\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n} \rangle \overrightarrow{n}$ (qui sont également dans le cours).

   (b) Les formules ci-dessus signifient : $\overrightarrow{s_\Delta} = 2\overrightarrow{\pi_\Delta} - Id$ et $\overrightarrow{s_H} = 2\overrightarrow{\pi_H} - Id$.

   (c) Pour la droite $\Delta$, on a $(1,2,-3) \wedge (1,-1,1) = (-1,-4,-3)$ donc on peut prendre le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\frac{1}{\sqrt{26}}(1,4,3)$. Pour le plan, le produit vectoriel $\overrightarrow{w_1} \wedge \overrightarrow{w_2}$ donne, après normalisation, le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\frac{1}{3}(2,-2,1)$.

   (d) Les formules pour les projections donnent :

$$Mat(\pi_\Delta) = \frac{1}{26}\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} \cdot (1,4,3) = \frac{1}{26}\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\4 & 16 & 12\\3 & 12 & 9\end{pmatrix},$$

$$Mat(\pi_H) = I_3 - \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \cdot (2,-2,1) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}5 & 4 & -2\\4 & 5 & 2\\-2 & 2 & 8\end{pmatrix},$$

   d'où on tire

$$Mat(s_\Delta) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}-12 & 4 & 3\\4 & 3 & 12\\3 & 12 & -4\end{pmatrix} \text{ et } Mat(s_H) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 8 & -4\\8 & 1 & 4\\-4 & 4 & 7\end{pmatrix}$$

3. (a) Le troisième vecteur est le produit vectoriel des deux premiers une fois normés. Il s'agit du troisième vecteur colonne de la matrice $M$ de l'exercice 4.

   (b) La matrice de passage est la matrice $M$ de l'exercice 4. Comme elle est orthogonale, son inverse est égal à sa transposée.

   (c) La base $\mathcal{B}'$ est obtenue en complétant une base de $\overrightarrow{H}$ par un vecteur orthogonal au plan. La projection orthogonale sur $H$ a donc pour matrice $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

   (d) Multiplier les coordonnées des sommets par $M^{-1}$. Il suffit d'ailleurs d'en calculer quatre sur les huit puisque les sommets du cube sont symétriques par rapport à l'origine.

   (e) Appliquer la projection dans les coordonnées suivant la nouvelle base consiste à prendre les deux premières coordonnées des résultats obtenus en 3.(d).

   (f) Dessin.

4. On reconnait la matrice de passage de l'exercice précédent. Elle a été construite pour être orthogonale de déterminant un (donc c'est une rotation), sinon on le vérifie par le calcul. Son axe est l'ensemble des vecteurs fixes pour $M$. On voit facilement que $\mathrm{Ker}(M - I_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\{(1,0,1)\}$. L'axe est engendré par $d := (1,0,1)$. On a ensuite $\mathrm{Tr}(M) = 2\cos(\theta) + 1 = 1/3$ autrement dit $\cos(\theta) = -1/3$. Le signe de l'angle est le même que celui de la quantité $\mathrm{Det}(e_1, Me_1, d) = \frac{1}{3}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 2 & 0\\0 & 2 & 1\end{vmatrix} > 0$. D'où $\theta = \mathrm{Arccos}(-1/3)$.