Université de Lorraine Faculté des Sciences et Technologies

TD n°1. Calculs en géométrie affine

Licences Mathématiques Automne 2013

Dans tous les exercices, on désigne par $\mathcal{E}$ l'espace de dimension 3.

1. Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère affine de $\mathcal{E}$. Soit A le point de coordonnées $(1, 0, -1)$ dans ce repère.
   (a) Justifier que $\mathcal{R}' = (A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un repère affine de $\mathcal{E}$.
   (b) Soit M le point de coordonnées (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}$. Quelles sont ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}'$?

2. Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère affine de $\mathcal{E}$. Soient A, B, C les points de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{i}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{j}, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{k}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{R}' = (A, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère affine de $\mathcal{E}$.
   (b) Soit M le point de coordonnées (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}$. Quelles sont ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}'$?

3. Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de $\mathcal{E}$. Soient A, B, C les points de coordonnées respectives
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Déterminer une équation du plan passant par A, B et C.

4. Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{P}$ le plan défini par l'équation
$$2x + 3y + z - 1 = 0 \ .$$
   (a) Déterminer une paramétrisation de $\mathcal{P}$.
   (b) Déterminer un repère $(A, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ dans lequel l'équation du plan $\mathcal{P}$ s'écrit $Z = 0$ (les coordonnées d'un point dans ce repère étant notées (X, Y, Z)).

5. Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de $\mathcal{E}$. Soit A le point de coordonnées $(5, -1, 2)$ et B le point de coordonnées $(1, 1, -1)$. Déterminer des équations de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et B.
   Trouver un repère dans lequel des équations de cette droite sont : $X = 0$, $Y = 0$.

6. Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de $\mathcal{E}$. On considère la droite $\mathcal{D}$ définie par le système d'équations
$$\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Paramétrer la droite $\mathcal{D}$.

(b) Déterminer un repère $\mathcal{R}' = (A, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ dans lequel la droite $\mathcal{D}$ a pour équation

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases},$$

les coordonnées d'un point dans ce repère étant notées (X, Y, Z).

7. Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de $\mathcal{E}$. On considère les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ définies respectivement par les équations

$$\mathcal{D} \quad \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \mathcal{D}' \quad \begin{cases} y + z + 3 = 0 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Déterminer si ces deux droites sont sécantes et éventuellement donner les coordonnées de leur intersection.

8. Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de $\mathcal{E}$. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation

$$2x + 3y - z + 1 = 0$$

et $\mathcal{D}$ la droite définie par le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Montrer que la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan $\mathcal{P}$ en un unique point M dont on déterminera les coordonnées.

9. On considère les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de $\mathbb{R}^3$ définies respectivement par les équations

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

(a) Déterminer des repères $(A, \overrightarrow{i})$ et $(A', \overrightarrow{i'})$ de ces 2 droites.

(b) Déterminer un vecteur $\overrightarrow{u}$ orthogonal à ces 2 droites.

(c) Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}'$) contenant $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}'$) et parallèle à $\overrightarrow{u}$.

(d) Déterminer l'intersection H' (resp. H) du plan $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}'$) avec la droite $\mathcal{D}'$ (resp. $\mathcal{D}$)

(e) Montrer que la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est la droite (HH'). Déterminer cette droite par un système d'équations et par un repère.

(f) Quelle est la plus petite distance d'un point de $\mathcal{D}$ et d'un point de $\mathcal{D}'$?