TD n°3. Matrices orthogonales et projecteurs

Licences Mathématiques Automne 2013

Dans tous les exercices, on désigne par $\mathcal{E}$ l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Le cube $\mathcal{C}$ est celui dont les sommets ont pour coordonnées $(\pm 1, \pm 1 \pm 1)$ dans la base canonique.

Exercice 1. Soit Δ une droite de $\mathcal{E}$ dirigée par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$, π_Δ le projecteur orthogonal sur Δ, et s_Δ la symétrie orthogonale par rapport à Δ (qui laisse la droite invariante). On note $\overrightarrow{\pi_\Delta}$ et $\overrightarrow{s_\Delta}$ les applications linéaires associées.

1. Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$. Écrire $\overrightarrow{\pi_\Delta}(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{s_\Delta}(\overrightarrow{v})$ en fonction de $\overrightarrow{u}$ (et de $\overrightarrow{v}$).
2. Écrire $\overrightarrow{s_\Delta}$ uniquement en fonction de $\overrightarrow{\pi_\Delta}$.
3. Dans la suite, on note $\Delta = \begin{cases} x + 2y - 3z & = 1 \\ x - y + z & = 2 \end{cases}$. Donner un vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{u}$ pour Δ.
4. Écrire la matrice de $\overrightarrow{\pi_\Delta}$, en déduire (ou recalculer) celle de $\overrightarrow{s_\Delta}$.

Exercice 2. Soit H un plan de $\mathcal{E}$, $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal unitaire, π_H le projecteur orthogonal sur H, et s_H la symétrie orthogonale par rapport à H (qui laisse le plan invariant). On note $\overrightarrow{\pi_H}$ et $\overrightarrow{s_H}$ les applications linéaires associées.

1. Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$. Écrire $\overrightarrow{\pi_H}(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{s_H}(\overrightarrow{v})$ en fonction de $\overrightarrow{n}$ (et de $\overrightarrow{v}$).
2. Écrire $\overrightarrow{s_H}$ uniquement en fonction de $\overrightarrow{\pi_H}$.
3. Dans la suite, on note $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathcal{R}$. On note ensuite $H = \{O + \lambda \overrightarrow{w_1} + \mu \overrightarrow{w_2},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Donner un vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n}$ pour H.
4. Écrire la matrice de $\overrightarrow{\pi_H}$, en déduire (ou recalculer) celle de $\overrightarrow{s_H}$.

Exercice 3. Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur de coordonnées $(1, 1, 1)$, $\Delta = \mathbb{R}\overrightarrow{v}$, et Π le plan vectoriel orthogonal à Δ. Écrire les matrices dans la base canonique des endomorphismes suivants :

1. le projecteur orthogonal sur la droite Δ ;
2. le projecteur orthogonal sur le plan Π ;
3. la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ ;
4. la symétrie orthogonale par rapport au plan Π ;
5. la rotation d'angle $\pi/2$ par rapport à la droite Δ orientée par $\overrightarrow{v}$;
6. la rotation d'angle $\pi/3$ par rapport à la droite Δ orientée par $\overrightarrow{v}$;

L'exercice doit pouvoir être fait avec un vecteur $\overrightarrow{v}$ quelconque.

Exercice 4. Reconnaître les endomorphismes ayant les matrices suivantes dans la base canonique :

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Idem pour

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}+1 & -\sqrt{3}+1 \\ -\sqrt{3}+1 & 1 & \sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}+1 & -\sqrt{3}+1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les exercices suivants sortent du cadre purement vectoriel. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure d'espace affine euclidien canonique.

Exercice 6. Déterminer l'expression matricielle de la symétrie orthogonale par rapport au plan affine d'équation $x + y + z - 1 = 0$.

Exercice 7. Reconnaître l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (-y - z + 1, -2x - y - 2z + 2, x + y + 2z - 1).$$