TD n°4. Géométrie euclidienne, II

Dans tous les exercices, on désigne par $\mathcal{E}$ l'espace $\mathbb{R}^3$ muni son repère orthonormé direct canonique $\mathcal{R}$.

Les exercices 3, 5, 7 et 8 sont tirés de l'examen de juin 2013 (modulo petites modifications).

Exercice 1. Soient a, b, c des réels. Notons D la droite passant par $A = (a, b, c)$ dirigée par $(1, 2, 1)$, et D' la droite passant par $A' = (c, b, a)$ et dirigée par $(2, 1, 2)$. À quelle condition sur (a, b, c) les droites sont-elles coplanaires ? Dans ce cas, quelle est l'équation du plan ?

Exercice 2. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles de $\mathcal{E}$ non coplanaires et tangents en un point. Montrer qu'ils sont contenus dans une sphère.

Exercice 3. Soit $v = (a, b, c)$ un vecteur unitaire.

1. Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de la réflexion orthogonale par rapport au plan d'équation $ax + by + cz = 0$.
2. Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme $u \mapsto v \wedge u$.
3. Décrire l'endomorphisme de matrice

$$M = \begin{pmatrix} a^2 & ab - c & ac + b \\ ab + c & b^2 & bc - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire, et θ un réel.

1. Montrer que la rotation d'axe $\overrightarrow{u}\mathbb{R}$ et d'angle θ est donnée par :

$$r(\overrightarrow{x}) = \cos(\theta)\overrightarrow{x} + \sin(\theta).(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x}) + 2\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}\rangle \sin^2(\frac{\theta}{2})\overrightarrow{u}.$$

2. Écrire la matrice de r dans la base canonique.
3. Déterminer par plusieurs méthodes la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\pi/3$ et d'axe dirigé par $u = (1, -1, 0)$.

Exercice 5. Pour tout triplet (a, b, c) de nombres réels on note $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Si $M(a, b, c)$ est une rotation, quel est son axe ?
2. Montrer que $M(a, b, c)$ est une rotation si et seulement si a, b et c sont les racines d'une équation de la forme $u^3 - u^2 + p = 0$, avec $p \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$. Si c'est une rotation, exprimer les coefficients en fonction de l'angle θ de rotation.
3. Décrire géométriquement le lieu des triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ correspondant à des rotations.

Exercice 6. Montrer que les sous-ensembles du plan suivants sont des carrés. Donner les coordonnées des sommets et des droites s'appuyant sur les côtés. Faire une figure.

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| + |y| \leq 1\}, \quad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \max(|x|, |y|) \leq 1\}.$$

Montrer que

$$C_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \max(|x|, |y|, |z|) \leq 1\}$$

est un cube. Donner les coordonnées des sommets et les équations des faces. Montrer que

$$C_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ |x| + |y| + |z| \leq 1\}$$

est un octaèdre. Donner les coordonnées des sommets et les équations des faces.

Exercice 7. Soit $\mathcal{C}$ le cube de $\mathbb{R}^3$ dont les sommets ont pour coordonnées $(\pm 2\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2})$. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + y + z = 0$. On note enfin $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ les vecteurs de coordonnées $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$ et $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(-1/2, -1/2, 1)$. Le plan vectoriel euclidien $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. Donner les équations dans $\mathcal{R}$ des six plans d'appui du cube. Décrire $\mathcal{C}$ par un système d'inégalités.
2. Donner les équations <u>dans $\mathcal{R}'$</u> des droites intersections des plans d'appui avec $\mathcal{P}$. Décrire $\mathcal{P} \cap \mathcal{C}$ par des inégalités de coordonnées dans le repère $\mathcal{R}'$.
3. Dessiner sur papier millimétré l'intersection du cube avec $\mathcal{P}$ (hachurer $\mathcal{P} \cap \mathcal{C}$, échelle : 1cm, on donne $\sqrt{3} \sim 1.73$).

Exercice 8. Soit $\mathcal{O} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad |x| + |y| + |z| \leq 9\}$. C'est un octaèdre régulier.

1. Donner sans preuve les coordonnées des sommets.
2. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $-4x - 7y + 4z = 1$. Compléter le vecteur $u = \frac{1}{9}(8, -4, 1)$ en une base orthonormée (u, v) de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, puis en une base orthonormée (u, v, w) de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. On note $\mathcal{B}'$ cette nouvelle base, et $\mathcal{R}'$ le repère $(O, \mathcal{B}')$ de $\mathcal{E}$.
3. Donner les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ des sommets de l'octaèdre.
4. Dessiner sur papier millimétré, en justifiant les calculs, la projection orthogonale de $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{P}$ (échelle : 1cm).