Université de Lorraine | Faculté des Sciences et Technologies

Géométrie affine et euclidienne — Examen

Licence de Mathématiques | Automne 2013

Documents et calculatrices interdits.

1. Parmi les matrices 2×2 dont les coefficients sont 0 ou 1, lesquelles sont des projecteurs ? Des projecteurs orthogonaux pour le produit scalaire canonique ? Lesquelles sont des matrices orthogonales ?
2. Soit $(\mathcal{E}, \langle -, - \rangle)$ un espace euclidien. Dans cet exercice, on demande de faire des dessins en dimension deux pour illustrer les preuves (noté). Bien sûr, on demande des preuves en dimension quelconque, pas juste deux ou trois.
   (a) Rappeler ce que signifie pour un projecteur d'être un projecteur orthogonal.
   (b) Montrer qu'un projecteur orthogonal est symétrique (ceci n'est donc pas la définition).
   (c) Montrer réciproquement qu'un projecteur symétrique est un projecteur orthogonal.
   (d) Montrer que si p est un projecteur orthogonal, alors pour tout $x \in \mathcal{E}$, $||p(x)|| \leq ||x||$.
   (e) Montrer réciproquement que si un projecteur p vérifie $\forall x \in \mathcal{E}$, $||p(x)|| \leq ||x||$, alors c'est un projecteur orthogonal. On pourra procéder par contraposée, par exemple.
   (f) Soient p et q deux projecteurs. S'ils commutent, montrer que $p \circ q$ est un projecteur.
   (g) Soient p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que si $p \circ q$ est un projecteur, alors p et q commutent. On pourra utiliser les questions précédentes.
   (h) Trouver deux exemples de projecteurs en dimension deux (parmi les exemples de l'exercice 1) dont la composée est un projecteur, mais qui ne commutent pas.
3. On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de sa base orthonormée canonique. Soit x un réel. On note u et v les vecteurs de coordonnées $(x^2+1, x+1)$ et $(x+1, -x^2+x+1)$. À quelle condition sur x est-ce une base orthogonale ? Orthonormée ?
4. (a) On considère R_1 la rotation d'angle orienté Ox et d'angle $\pi/2$, et R_2 la rotation d'angle orienté Oy et d'angle $\pi/2$. Écrire les matrices de R_1 et R_2.
   (b) Identifier les endomorphismes R_1R_2 et R_2R_1.
5. Soit Δ_1 la droite $\{(0,0,-1)+t(1,0,0), t \in \mathbb{R}\}$ et Δ_2 la droite $\{(0,0,1)+t(0,1,0), t \in \mathbb{R}\}$. Soit Q l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ qui sont à égale distance de Δ_1 et Δ_2. Montrer que Q est décrit par une seule équation (non linéaire) et donner cette équation.
6. Reconnaître les endomorphismes de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont :
   a) $\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -9 & 6 & -2 \\ 6 & 7 & -6 \\ -2 & -6 & -9 \end{pmatrix}$; c) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & 1 & \sqrt{3}-1 \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix}$;
7. (a) Écrire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + y + z = 0$.

(b) On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 2zy = 1\}$$

Montrer que le plan $x + y + z = 0$ est un plan de symétrie de $\mathcal{E}$.

(c) Rappeler en justifiant (ou refaire les calculs) quelle est la matrice de la rotation R d'axe $(1, 1, 1)$ et d'angle $2\pi/3$.

(d) Montrer que $\mathcal{E}$ est globalement invariant par la rotation R.