Université de Lorraine | Faculté des Sciences et Technologies

Géométrie affine et euclidienne — Interrogation 1

Licence de Mathématiques | Automne 2013

Documents et calculatrices interdits. Dans tous les exercices, on travaille dans $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension trois, muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. Donner une équation du plan passant par le point de coordonnées $(5, -3, 5)$ et parallèle au plan d'équation $2x - y + z = 3$.
   Correction : ce plan a une équation de la forme $2x - y + z = d$ *avec* d *un réel. Comme le triplet* $(5, -3, 5)$ *doit vérifier cette équation, on a* $d = 18$.
2. Soient a, b, c, d, α, β, γ des réels. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ soit parallèle à une droite dirigée par un vecteur de coordonnées (α, β, γ).
   Correction : le vecteur $\overrightarrow{n}$ *de coordonnées* (a, b, c) *est normal au plan. La droite est parallèle au plan si et seulement si elle est orthogonale à* $\overrightarrow{n}$. *La condition est donc* $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.
3. Soient A, B et C les points de coordonnées $(0, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$ et $(1, 0, 2)$, et $\mathcal{P}$ le plan passant par A, B et C. D'autre part, on note
$$\Delta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$
   Intersecte-t-elle le plan $\mathcal{P}$? Si oui, calculer l'intersection. Est-elle incluse dans ce plan ?
   Correction : un vecteur normal au plan est $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, *qui a pour coordonnées* $(1, 1, -2)$. *En utilisant les coordonnées de* A, *on obtient une équation de* $\mathcal{P}$: $x + y - 2z + 3 = 0$. *Un point de* Δ *s'écrit de manière unique* $(2 - \alpha, -\alpha, 1 + \alpha)$, *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Un tel point appartient donc à* $\mathcal{P}$ *ssi* $(2 - \alpha) + (-\alpha) - 2(1 + \alpha) + 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3/2$. *Le point d'intersection a donc pour coordonnées* $(7/2, -3/2, 5/2)$.
4. Soit Δ_2 l'intersection des deux plans d'équations $x + y + z + 1 = 0$ et $x - y + z - 1 = 0$. Déterminer un paramétrage de cette droite, ainsi qu'une équation du plan contenant cette droite et le point de coordonnées $(1, 1, 1)$.
   Correction : le système linéaire formé des deux équations a pour ensemble de solutions la droite $\{(0, -1, 0) + \alpha(-1, 0, 1),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$. *Ensuite on peut toujours prendre les points* $(0, -1, 0)$ *et* $(-1, -1, 1)$ *de* Δ_2 *et faire comme dans l'exercice 3, ou constater que le point donné appartient en fait au plan défini par la deuxième équation de l'énoncé.*
5. Avec les notations de l'exercice précédent, déterminer un repère $\mathcal{R}'$ où le premier plan a pour coordonnées $X = 0$, le deuxième plan a pour coordonnées $Y = 0$, et la droite est l'axe $(O'Z)$.
   En notant $\overrightarrow{n_1}$ *et* $\overrightarrow{n_1}$ *les vecteurs orthogonaux aux plans, de coordonnées* $(1, 1, 1)$ *et* $(1, -1, 1)$, *et* $\overrightarrow{u}$ *un vecteur directeur de* Δ_2, *il suffit de prendre le repère*
$$(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{u}).$$