Géométrie affine et euclidienne — Interrogation 2

Licence de Mathématiques Automne 2013

On note $\phi = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ le nombre d'or. On a donc $\phi^{-1} = \phi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidiene orientée canonique et du repère orthonormé canonique $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soient A, B, et C les points de coordonnées $(\phi, 1, 0)$, $(1, 0, \phi)$, et $(0, \phi, 1)$. On note O l'origine, de coordonnées $(0, 0, 0)$, G le centre de gravité du triangle ABC, σ_x la réflexion orthogonale d'axe Oyz, σ_z la réflexion orthogonale d'axe Oxy, σ_A la réflexion orthogonale suivant le plan OBC.

1. Montrer que le triangle ABC est équilatéral et calculer la longueur AB.
2. Calculer les coordonnées du point G.
3. Soit P le projeté orthogonal de B sur la droite (OC). Calculer ses coordonnées.
4. Donner une équation du plan ABP.
5. Donner une équation du plan OBC.
6. On note $A' = \sigma_x(A)$ et $C' = \sigma_z(C)$. Donner leur coordonnées.
7. Calculer la matrice (dans la base canonique) de σ_A.
8. On note $B' = \sigma_A(A)$. Calculer les coordonnées de B'.
9. Montrer que les triangles BCB', $B'CA'$, $A'CC'$ et $C'CA$ sont équilatéraux.
10. Montrer que les points A, A', B, B' et C' sont coplanaires.
11. Calculer l'angle $\widehat{BPA}$. Le polygone $ABB'A'C'$ est-il un pentagone régulier convexe ?
12. Expliquer, sans faire les calculs, comment obtenir un icosaèdre (c'est-à-dire un polyèdre régulier à 12 sommets) à partir de cette construction.

Correction rapide.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ ont pour coordonnées $(1-\phi, -1, \phi)$, $(-1, \phi, 1-\phi)$ et $(\phi, 1-\phi, -1)$. A permutation près, ce sont les mêmes coordonnées, donc leur norme est égale. Le triangle est équilatéral. La longueur des arètes est deux.
2. Le point G a pour coordonnées $\frac{1}{3}(\phi+1+0, 1+0+\phi, 0+\phi+1) = \frac{\phi+1}{3}(1, 1, 1)$.
3. $P \in (OC)$, donc il existe un unique réel α tel que P a pour coordonnées $(0, \phi\alpha, \alpha)$. De plus on a $\overrightarrow{BP} \perp \overrightarrow{OC}$, donc
$$-1 \times 0 + \phi\alpha \times \phi + (\alpha - \phi) \times 1 = 0$$
Autrement dit $\alpha(\phi^2+1) - \phi = 0$ ou encore $\alpha = \frac{\phi}{\phi+2}$. Donc P a pour coordonnées
$$\left(0, \frac{\phi+1}{\phi+2}, \frac{\phi}{\phi+2}\right)$$
4. Un vecteur normal au plan ABP est $(0, \phi, 1)$. En injectant les coordonnées de A par exemple, on trouve l'équation
$$\phi y + z = \phi.$$
On vérifie bien que A, B et P sont bien sur ce plan.

5. Un vecteur normal à OBC est $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}$ qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \phi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\phi^2 \\ -1 \\ \phi \end{pmatrix}$.

   Une équation du plan est donc $(1+\phi)x+y-\phi z = 0$, en utilisant $\phi^2 = 1+\phi$ (et en remarquant que le plan contient l'origine). On vérifie quand même que B et C vérifient cette équation. Le produit vectoriel est de norme 2ϕ. On calcule tout de suite un vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n}$, par exemple $\frac{1}{2}(\phi, \phi-1, -1)$, qui servira pour la question 7.

6. Les coordonnées de A' sont $(-\phi, 0, 1)$ et celles de C' sont $(0, \phi, -1)$.

7. Soit M un point de coordonnées (x, y, z), et $M = \sigma_A(M)$ de coordonnées (x', y', z'). Alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal au plan OBC et sa longueur est par définition deux fois la distance de M au plan OBC, distance que l'on peut calculer avec la formule classique du cours. Comme on a déjà calculé un vecteur unitaire plus haut on peut tout de suite écrire :

$$\overrightarrow{MM'} = -2\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{n} \rangle \overrightarrow{n} = -\frac{1}{2}\left(\phi x + (\phi-1)y - z\right) \begin{pmatrix} \phi \\ \phi-1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi+1 & 1 & -\phi \\ 1 & 2-\phi & 1-\phi \\ -\phi & 1-\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   On en déduit la matrice de la réflexion :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-\phi & -1 & \phi \\ -1 & \phi & \phi-1 \\ \phi & \phi-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

8. Appliquons la matrice aux coordonnées de A. On obtient que les coordonnées de B' sont

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-\phi & -1 & \phi \\ -1 & \phi & \phi-1 \\ \phi & \phi-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \phi \end{pmatrix}$$

   Remarque : c'est le symétrique de B par rapport au plan $x = 0$.

9. Le triangle $B'BC$ est équilatéral car c'est l'image du triangle équilatéral ABC par l'isométrie σ_A. Le triangle $B'CA'$ est l'image de ABC par l'isométrie σ_x donc il est également équilatéral. Les deux triangles $A'CC'$ et ACC' sont isométriques car image l'un de l'un par σ_x. On vérifie facilement qu'ils sont équilatéraux : manifestement $CA = C'A = 2$ et $CC' = 2$.

10. Il suffit d'injecter les coordonnées de points dans l'équation du plan. En fait ça se voit assez directement.

11. (Hors barème) C'est le seul vrai calcul important qui reste. Je n'ai pas pensé à vous redonner le cosinus de $3\pi/5$ (vu en TD cela dit).

12. Cette question était en bonus. Le sujet a construit six points. Il suffit de prendre les points de coordonnées opposées. Cela fait un icosaèdre (il reste des choses à vérifier bien sûr). Je vous conseille d'aller voir sur la page wikipedia de l'icosaèdre.