Géométrie affine et euclidienne — Interrogation 3

Licence de Mathématiques — Automne 2013

Documents et calculatrices interdits. Les matrices sont celles d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ relativement à sa base orthonormée directe canonique.

1. Les matrices suivantes sont orthogonales, on ne demande pas de le vérifier. Identifier les endomorphismes correspondant.

$$M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 2 & 3 & -6 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad N = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Solution : On détermine le signe des déterminants soit en les calculant, soit en regardant si la troisième est le produit vectoriel des deux premières ou bien son opposé. La première isométrie est donc directe, la seconde indirecte.
a) L'axe (orienté) de la rotation est $\ker(M-I) = \mathbb{R}u$ avec $u = (1,-1,1)$, et son angle θ vérifie $Tr(M) = 2\cos(\theta) + 1 \Leftrightarrow \cos(\theta) = 1/7$. Le signe de θ est celui de $\det(e_1, Me_1, u) = 3\times 1 - 2\times(-1)$ qui est positif. M est une rotation d'angle $Arccos(1/7)$ d'axe $\mathbb{R}(1,-1,1)$.
b) On trouve $\cos(\theta) = 1$ donc $\theta = 0$, c'est une réflexion par rapport à un plan orthogonal à un vecteur anti-fixe. On a $\ker(N+I) = \mathbb{R}(2,-1,-2)$.

2. Pour quels réels α la matrice suivante est-elle un projecteur ?

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \alpha+2 & \alpha-2 & 2 \\ \alpha-2 & \alpha+2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour les réels qui α qui conviennent, en choisir un et dire si le projecteur est orthogonal, sur quoi il projette et parallèlement à quoi.

Solution : M est un projecteur ssi $M^2 = M$, autrement dit après calcul de M^2, ssi $\alpha^2 = 3\alpha$ c'est-à-dire $\alpha = 0$ ou $\alpha = 3$. Dans le premier cas, la matrice est $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on reconnaît directement le projecteur orthogonal sur la droite dirigée par $(1,-1,1)$. Si on le reconnait pas, déjà on voit que le rang du projecteur est un, donc c'est un projecteur sur une droite ; ensuite on calcule le noyau, l'image et on vérifie qu'ils sont orthogonaux. Autre justification acceptée sans détails : le projecteur est orthogonal puisqu'il est autoadjoint (la matrice est symétrique).

Dans le second cas, la matrice est $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. On ne reconnait pas forcément le projecteur, mais il est clair qu'il n'est pas de rang un, donc c'est un projecteur sur un plan. On peut donc former le projecteur « conjugué » $Id - M$, qui lui est reconnaissable : c'est le projecteur orthogonal sur la droite $(1, -1, -2)\mathbb{R}$. Finalement, M est la projection orthogonale sur le plan $\{x - y - 2z = 0\}$.

3. Soit Δ la droite définie par les équations $x + y + z = 0$ et $x - y + z = 0$, et H le plan vectoriel orthogonal à Δ. Écrire la matrice de la projection orthogonale sur H.

   Solution : un vecteur normal unitaire au plan est $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, comme on le voit en résolvant le système ou bien en calculant le produit vectoriel de $(1, 1, 1)$ et de $(1, -1, 1)$. On en déduit que la matrice de projection orthogonale sur Δ est $u.{}^t u$, puis que le projecteur sur H est $Id - u.{}^t u$.

4. Écrire la matrice de la rotation d'angle $\pi/2$ d'axe orienté par $u = (3, 2, 6)$. Indication : utiliser l'énoncé de l'exercice 1 (juste l'énoncé, pas l'exercice lui-même).

   Solution : la première matrice P de l'énoncé de l'exercice 1 fournit une base orthonormée directe dont le premier vecteur sera l'axe de notre rotation. Dans cette base, la rotation s'écrit :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Dans la base canonique, la matrice de la rotation est donc

$$PRP^{-1} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 2 & 3 & -6 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 2 & 3 & -6 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 9 & -36 & 32 \\ 48 & 4 & -9 \\ 4 & 33 & 36 \end{pmatrix}$$

   Évidemment, on pouvait choisir une autre base orthonormée (directe), du moment qu'un vecteur est l'axe de rotation demandé.