2. Transformations du plan

Dans tous les exercices, on s'efforcera de raisonner et de rédiger en considérant des transformations du plan appropriées. Dans les exercices demandant de tracer un certain objet, il est conseillé de tracer au brouillon la figure finale et de faire un récapitulatif de tout ce qui est utilisable avant même de commencer l'exercice : égalités ou relations entre angles ; droites parallèles, rapports de longueurs, etc.

Exercice 1. Soit $\mathcal{C}$ un cercle et D une droite. Construire une droite parallèle à D coupant le cercle $\mathcal{C}$ en deux points situés à une distance a donnée (inférieure au diamètre).

Exercice 2. On donne un nombre impair de points du plan M_1, ...M_n. Existe-t-il un polygone P_1, P_2, ... P_n tel que les M_i soient les milieux des côtés du polygone ? Commencer par $n = 3$ et $n = 5$. Et si n est pair ?

Exercice 3. On considère trois droites parallèles D_1, D_2 et D_3. Construire un triangle équilatéral dont les sommets appartiennent respectivement à D_1, D_2 et D_3.

Exercice 4. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux segments parallèles de longueurs différentes. Montrer qu'il existe des homothéties transformant l'un en l'autre. Combien y a-t-il de telles homothéties ? Tracer leurs centres. Montrer que la droite reliant ces centres coupe les segments en leur moitié. [1]

Exercice 5. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles. Montrer qu'il existe des homothéties transformant l'un en l'autre. Combien y a-t-il de telles homothéties ? Tracer leurs centres.

Exercice 6. Soit ABC un triangle. Construire un carré dont un sommet appartient à $[AB]$, un à $[AC]$ et deux sommets adjacents appartiennent à $[BC]$.

Exercice 7. (Pappus affine) Soient D et D' deux droites. Soient A, B, C trois points sur D, et A', B' et C' trois points sur D'. Si $(AB')//(BC')$ et $(BA')//(CB')$, alors $(AA')//(CC')$.

Exercice 8. (Desargues affine) Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommet commun et à côtés respectivement parallèles. Alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.

Exercice 9. Soient trois cercles deux à deux disjoints de rayons différents. Pour chacune des trois paires de cercles, tracer les deux tangentes extérieures communes à la paire ainsi que leur point d'intersection. Montrer que les trois points obtenus sont alignés.

1. Retenir ce résultat, c'est Thalès dans un trapèze.

Exercice 10. Soit $ABCD$ et $A'B'C'D'$ deux carrés du plan inclus l'un dans l'autre. On suppose que ce sont des cartes routières de la même région, tracées à différentes échelles, posées l'une sur l'autre. Montrer qu'il existe un unique point dont les représentations sur les deux cartes coïncident, et construire ce point.

Exercice 11. Soit $ABCD$ un parallélogramme, et M un point sur la diagonale (BD). Soit I le symétrique de C par rapport à M. Soit E la projection de I sur (AB) parallèlement à (AD), et F la projection de I sur (AD) parallèlement à (AB). Montrer que E, M et F sont alignés.

Exercice 12. On considère un carré $ABCD$, et on place quatre points E, F, G, et H sur les côtés de ce carré (en-dehors des sommets). Puis, on efface le carré. Reconstruire le carré.

Exercice 13. Soit ABC un triangle équilatéral. Pour tout point M à l'intérieur du triangle, on note $d = dist(M, [AB]) + dist(M, [BC]) + dist(M, [AC])$ la somme des distances de M aux trois côtés. Montrer que d ne dépend en fait pas du point M.

* * * * * *Indications* * * * * *

Exercice 12 : Indication pour une première solution : penser à l'exercice 3. Indication pour une deuxième solution : penser au lien entre angles droits et cercles.

Exercice 13 : penser à l'exercice 3.

Exercice 11 : un moyen de montrer que trois points sont alignés, c'est de montrer que l'un est le centre d'une homothétie envoyant le deuxième sur le troisième.