3. Barycentres et géométrie affine

Exercice 1. Soit ABC un triangle. On considère le barycentre A' de $(B,2)$ et $(C,-3)$, le barycentre B' de $(A,5)$ et $(C,-3)$, et le barycentre C' de $(A,5)$ et $(B,2)$. Prouver que (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

Exercice 2. Soient A et B deux points distincts, α et β deux réels de somme non nulle, et G le barycentre de (A,α) et (B,β). Montrer que $G \in [AB]$ si et seulement si α et β sont de même signe.

Exercice 3. Soient A et B deux points. Quel est le lieu des points M tels que $||\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|| = AB$? Tels que $||2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|| = r$, où $r > 0$? Représenter ces ensembles.

Exercice 4. Soit $ABCD$ un carré. Quel est l'ensemble des points M tels que $||2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|| = AB$? Représenter cet ensemble.

Exercice 5. Soit ABC un triangle équilatéral. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

$$||\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}|| = ||\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}||.$$

Exercice 6. On munit le plan d'un repère barycentrique. Exprimer l'alignement de trois points en coordonnées barycentriques. En déduire l'équation générale d'une droite en coordonnées barycentriques.

Exercice 7. On munit le plan d'un repère barycentrique. Exprimer le fait que trois droites soient concourantes comme une condition sur les équations des droites dans le repère barycentrique.

Exercice 8. Soient A et B. Quel est le lieu des points M tels que $AM = BM$? Ceux tels que $AM = 2BM$?

Exercice 9 (théorème de Menelaüs)**.** Soit ABC un triangle, et soient A', B' et C' trois points respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB). Montrer que les points A', B' et C' sont alignés ssi

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Exercice 10 (théorème de Ceva)**.** Soit ABC un triangle, et soient A', B' et C' trois points respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB). Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes ssi

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$