

## 4. Constructions au compas seul

---

Dans cette feuille, les constructions doivent se faire au compas seul.

**Exercice 1.** Soient  $A$  et  $B$  deux points, et  $C$  un troisième point. Tracer le symétrique orthogonal  $C'$  de  $C$  par rapport à  $(AB)$ .

**Exercice 2.** Soient  $A$  et  $B$  deux points, et  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $O$  donné<sup>1</sup>. On suppose que  $O$  n'est pas sur  $(AB)$ . Tracer l'intersection de  $(AB)$  avec  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 3.** Soient  $A$  et  $B$  deux points. Tracer le symétrique de  $A$  par rapport à  $B$ .

**Exercice 4.** Soient  $A$  et  $B$  deux points. Tracer leur milieu.

**Exercice 5.** Soient  $O$ ,  $A$  et  $B$  trois points alignés. Construire un point  $M$  sur la droite  $(AB)$  tel que  $OM = OA + OB$ .

**Exercice 6.** Soient  $B$  et  $B'$  deux points, et  $A$  leur milieu. On considère un demi-cercle de diamètre  $[BB']$ , et les points  $E$  et  $F$  sur ce demi-cercle, tels que  $BE = EF = FB'$ . Les cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  de centres respectifs  $B$  et  $B'$ , et de rayon  $BF = EB'$ , se croisent en deux points  $G$  et  $G'$ , de part et d'autre du segment  $[BB']$ . Le point  $A$  est le milieu de  $GG'$  par construction. Montrer que  $AG = \sqrt{2}BA$ .

**Exercice 7.** Soient  $A$  et  $B$  deux points. Construire un carré de côté  $[AB]$ .

Mentionnons pour finir le très joli résultat suivant.

**Théorème 1.** (Problème de Napoléon) Le centre d'un cercle est constructible au compas seul.

La démonstration est plus difficile, bien que pas du tout hors de portée. Les preuves courtes utilisent les *inversions* : des transformations que l'on étudiera en fin de semestre, qui fixent un cercle et échangent l'intérieur et l'extérieur du cercle. Par exemple, en utilisant les nombres complexes, l'application  $z \mapsto 1/\bar{z}$  est une inversion de centre 0 qui fixe le cercle de rayon un, et qui envoie zéro sur l'infini. Un nombre complexe non nul  $re^{i\theta}$  est envoyé sur  $\frac{1}{r}e^{i\theta}$  : le module est inversé, l'argument est conservé.

\* \* \* \* \* *Indications* \* \* \* \* \*

Exercice 4 : utiliser l'exercice 3.

Exercice 5 : utiliser les exercices 3 et 4.

Exercice 6 : commencer par calculer  $BF$ .

Exercice 7 : utiliser l'exercice 6.

---

1. Donner le centre est superflu, voir le problème de Napoléon.