5. Constructions à la règle seule

Dans cette feuille toutes les constructions doivent se faire à la règle (non graduée) seule.

Exercice 1. Soit $\mathcal{D}$ une droite, A et B deux points distincts n'appartenant pas à cette droite, et A' le symétrique de A par rapport à $\mathcal{D}$. On suppose que $A'B$ n'est pas parallèle à $\mathcal{D}$. Construire à la règle seule le symétrique B' de B par rapport à $\mathcal{D}$.

Exercice 2. Soient deux droites D et D', sécantes en O, et un point P. Construire la droite (OP) sans utiliser le point O.

Exercice 3. Soient deux droites parallèles distinctes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, et P un point non situé sur ces droites. Construire à la règle seule la droite passant par P et parallèle aux deux autres.

Exercice 4. Soit $[AB]$ un segment et $\mathcal{D}$ une droite parallèle. Construire le milieu de $[AB]$. Construire aussi le symétrique de A par rapport à B, puis n'importe quel barycentre à coefficients rationnels de A et de B.

Exercice 5. On donne un cercle $\mathcal{C}$ ainsi qu'un diamètre $[AB]$, et un troisième point M du cercle. Construire le projeté orthogonal de M sur (AB) à la règle seule. On pourra commencer [1] par construire une droite orthogonale à (AB) coupant le cercle, puis utiliser un des exercices précédents.

Exercice 6. On donne un carré, une droite D, et un point P. Construire la perpendiculaire à cette droite à D en P, en utilisant plusieurs fois l'exercice 3

Exercice 7. On donne deux points A et B, et une règle légèrement plus courte que la distance AB. Expliquer comment utiliser l'exercice 2 pour tracer la droite (AB) avec cette règle trop courte.

Exercice 8. On donne deux paires de droites parallèles (non parallèles toutes les quatre), un point P et une cinquième droite $\mathcal{D}$. Construire la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par P. Remarquer qu'il suffit de construire n'importe quelle droite parallèle à $\mathcal{D}$ puis d'utiliser l'exercice 3.

Exercice 9 (pôle et polaire)**.** Soit $\mathcal{C}$ un cercle, et $ABCD$ un quadrilatère [2] direct inscrit dans $\mathcal{C}$. On note $P = (AB) \cap (CD)$, $Q = (BC) \cap (DA)$ et $I = (AC) \cap (BD)$. On dit que la droite (QI) (resp. (PI)) est la *polaire* du point P (resp. Q) par rapport à $\mathcal{C}$ et réciproquement on dit que le point P (resp. Q) est le *pôle* de la droite (QI) (resp. (PI)) par rapport à $\mathcal{C}$.

La droite (PI) coupe $\mathcal{C}$ en P' et P'', et la droite (QI) coupe $\mathcal{C}$ en Q' et Q''. Montrer que PQ' et PQ'' sont les tangentes à $\mathcal{C}$ issues de P et similairement que QP' et QP'' sont les tangentes à $\mathcal{C}$ issuées de Q.

1. Deuxième indication : utiliser un orthocentre
2. Pour les besoins de la figure, éviter que $ABCD$ ressemble à un trapèze ou pire à un rectangle.

Exercice 10. On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre inconnu et un point P hors de $\mathcal{C}$. Tracer les deux tangentes à $\mathcal{C}$ issues de P

Exercice 11. On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre inconnu et un point X sur $\mathcal{C}$. Construire la tangente à $\mathcal{C}$ en X.

Exercice 12. On donne deux cercles sécants $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de centres inconnus. Pour la figure, on pourra tracer deux cercles de même rayon même si ce n'est pas nécessaire. L'objectif de l'exercice est de tracer le centre d'un cercle.

1. Montrer que tout trapèze inscrit dans un cercle est forcément isocèle.
2. Montrer que la donnée d'un trapèze inscrit dans $\mathcal{C}$ permettrait de tracer un diamètre de $\mathcal{C}$ et donc de résoudre la question posée. Penser à distinguer le cas où le trapèze est un rectangle.
3. On cherche maintenant à construire un trapèze inscrit à $\mathcal{C}$. Pour cela, compléter A et B en un quadrilatère (quelconque mais) $ABCD$ inscrit dans $\mathcal{C}'$. Les quatre droites (AC), (AD), (BC), (BD) intersectent $\mathcal{C}$ en quatre points A', A'', B', B''. Montrer que ce sont les sommets d'un trapèze.

Exercice 13. On donne un cercle ainsi que son centre, un point P et une droite $\mathcal{D}$.

1. Expliquer comment construire la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par P, en utilisant l'exercice 8.
2. Expliquer comment construire la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par P. On distinguera deux cas : si (OP) n'est pas parallèle à $\mathcal{D}$ on pourra utiliser la première question deux fois. Si (OP) est parallèle à $\mathcal{D}$, effectuer la construction en utilisant l'exercice 5.

En fait, tous les points constructibles à la règle et au compas sont constructibles uniquement à la règle accompagnée d'un cercle et de son centre, c'est le théorème de Poncelet-Steiner.

* * * * * *Indications* * * * * *

Exercice 8 : Soient $ABCD$ les quatre points d'intersection de $\mathcal{D}$ avec les autres droites. Les deux paires de droites forment un parallélogramme. Considérer un point I sur une de ses diagonales. Tracer les droites (AI), (BI), etc. Ces droites recoupent les deux couples de droites en des points. Que dire de ces points ?

Exercice 12 : Utiliser le théorème de l'angle inscrit pour déterminer le plus possible d'angles, puis utiliser des angles alterne-internes pour en déduire le parallélisme de deux droites.

Exercice 10 : tracer la polaire de P par rapport à $\mathcal{C}$, voir exercice 9.

Exercice 11 : Tracer une sécante $\mathcal{D}$ à $\mathcal{C}$ passant par X, puis tracer le pôle de $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{C}$, voir exercice 9.