Nombres complexes et géométrie

Exercice 1 (Théorème de Von Aubel)**.** Soit $ABCD$ un quadrilatère direct. On construit quatre carrés qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Les centres respectifs de ces carrés sont notés P, Q, R, et S. Le but est de montrer que les diagonales du quadrilatère $PQRS$ sont de même longueur et se croisent à angle droit.

1. Montrer que dans le carré construit sur $[AB]$, on a $p = \frac{a-ib}{1-i}$. Démontrer des relations analogues pour les autres carrés.
2. Calculer $\frac{s-q}{r-p}$ et conclure.

Exercice 2 (Point de Vecten)**.** Soit ABC un triangle direct. On construit trois carrés qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$. Les centres respectifs de ces carrés sont notés P, Q et R. Le but est de montrer que (AQ), (BR) et (CP) sont concourantes. Le point de concours est appelé *point de Vecten* du triangle.

1. Montrer que ABC et PQR ont même centre de gravité.
2. Montrer que dans le carré construit sur $[AB]$, on a $p = \frac{a-ib}{1-i}$. Démontrer des relations analogues pour les autres carrés.
3. Montrer que (AQ) et (PR) sont perpendiculaires. Conclure.

Exercice 3 (Caractérisation des triangles équilatéraux)**.** On note comme d'habitude j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$. Soit ABC un triangle. Montrer les équivalences suivantes :

$$ABC \text{ équilatéral} \Leftrightarrow a + jb + j^2c = 0 \Leftrightarrow a - b = -j^2(c - b).$$

Exercice 4 (Théorème de Napoléon)**.** Soit ABC un triangle direct. Soient P, Q, R tels que CBP, ACQ et BAR soient des triangles équilatéraux directs. On note U, V, W les centres de gravité respectifs de ces trois triangles équilatéraux. Montrer que UVW est équilatéral, de même centre de gravité que ABC, en utilisant l'exercice 3.

Exercice 5 (Une homographie)**.** Soient A et B d'affixes $-3 + 2i$ et $5 - 3i$. Soit f l'application qui à un point M d'affixe $z \neq b$ associe le point d'affixe $f(z) = \frac{z-a}{z-b}$.

1. Interpréter géométriquement le module et l'argument de $f(z)$.
2. Déterminer les parties réelles et imaginaires de $f(z)$ en fonction de $x = Re(z)$ et $y = Im(z)$.
3. Déterminer et construire les ensembles de points M d'affixes z tels que a) $|f(z)| = 1$; b) $f(z) \in \mathbb{R}$; c) $f(z) \in i\,\mathbb{R}$; d) $|f(z)| = 2$; e) $f(z) \in \mathbb{R}^*_-$.