6, Nombres complexes et géométrie
quelques corrections et remarques

Cette feuille contient des conseils et des éléments de correction pour la feuille 6. Elle est rédigée informellement et avec beaucoup remarques insérées au milieu des corrections.

Conseils généraux toujours en vigueur : faire une figure lisible, grande, et précise. En lisant l'énoncé, commencer par tracer une figure approximative à main levée au brouillon pour voir l'aspect final de la figure. Ensuite, faire une figure précise sur une demi-page, voire une page entière. Une figure doit être tracée rapidement. Éviter de faire une figure trop « spéciale » : un triangle n'est en général pas équilatéral ni isocèle ou rectangle, un quadrilatère n'est pas un rectangle, etc.

Récapituler les données connues et ce que l'on veut démontrer, puis traduire ces propriétés en termes d'affixes. Repenser au cours, à la forme des transformations classiques écrites avec des nombres complexes, etc.

Et enfin : une démonstration de géométrie utilisant les nombres complexes se réduit en général à montrer que deux complexes sont égaux, ou bien montrer qu'ils ont même module, ou même argument. Ces résultats sont en général faciles à obtenir car il suffit de poser le calcul et de le mener au bout. Par contre, il faut 1) savoir ce que l'on veut, donc savoir traduire un énoncé en termes de nombres complexes pour pouvoir le démontrer, et 2) savoir, dans un calcul, reconnaître géométriquement une expression : différence de complexes, produit scalaire, aire d'un triangle, quotient de complexes, rotations, homothéties, etc. Pour cela, il suffit de connaître le cours. Et enfin : 3) le calcul ne va pas se faire tout seul, il faut bien commencer par quelque chose : il faut manipuler les expressions (factoriser, développer, mettre sous forme algébrique ou exponentielle, prendre des modules, des conjugués...) pour en obtenir d'autres équivalentes, jusqu'à reconnaître une quantité connue, une transformation, un vecteur, un milieu...

Correction 1 (Théorème de Von Aubel)**.** Déjà, il faut tout de suite traduire en termes de nombres complexes ce que donne l'énoncé : qui dit carré dit côtés de même longueur et orthogonaux, ceci se traduit en termes de nombres complexes par des égalités de modules et des arguments $\pm\pi/2$ pour des quotients adéquats.Si on note $ABB'A'$ le carré direct appuyé sur $[AB]$, alors on a par exemple $AB = AA'$ et $(\widehat{\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB}}) \equiv -\pi/2\,[2\pi]$ (angle orienté $-\pi/2$). En complexes, on résumé ça par $\frac{b-a}{a'-a} = i$. On rappelle aussi que les diagonales se croisent à angle droit et ont même longueur, on a donc $\frac{b-a'}{b'-a} = i$. Enfin, puisque l'on l'on a P le milieu du carré et comme les diagonales se coupent en leur milieu, on a par exemple $\frac{a-p}{b-p} = i$. Attention aux éventuelles erreur sur les $\pm i$, faire une figure pour vérifier le signe des angles.

Ces relations doivent être mises en mémoire lors de la résolution de l'exercice. Passons maintenant à la résolution des questions.

1. Commençons par manipuler l'égalité $p = \frac{a-ib}{1-i}$. pour voir si elle n'est pas équivalente à une autre assertion qu'on sait être vraie. Deux choses qu'on peut avoir l'idée de faire

sont :

$$p = \frac{a-ib}{1-i} \Leftrightarrow p = \frac{a+b}{2} + i\frac{(a-b)}{2}$$

(attention a et b sont complexes ceci n'est pas une forme algébrique), ou bien

$$p = \frac{a-ib}{1-i} \Leftrightarrow (1-i)p = a - ib.$$

Ces deux assertions sont vraies, en effet :

(a) Dans le premier cas, on reconnaît que $(a+b)/2$ est l'affixe du milieu M de A et B, que $(a-b)/2$ correspond au vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, et que $i(a-b)/2$ correspond à la rotation de $\pi/2$ de ce vecteur. On voit donc que le point d'affixe $\frac{a+b}{2} + i\frac{(a-b)}{2}$ est le point obtenu en translatant M du vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ (avec la notation A' introduite plus haut). Ce point est bien le milieu P du carré, donc c'est fini.

(b) Dans le second cas, on réécrit l'égalité sous la forme

$$a - p = i(b-p).$$

Ceci est vrai car cela signifie que A est l'image de B par la rotation de centre P est d'angle $\pi/2$, ce qui est vrai dans un carré.

2. Déjà, « conclure » signifie terminer l'exo, c'est-à-dire, en termes de nombres complexes, montrer que $\frac{s-q}{r-p} = i$. Ensuite, pas grand chose à dire : on calcule $\frac{s-q}{r-p}$ en remplaçant avec la question précédente :

$$\frac{s-q}{r-p} = \frac{d-ia-(b-ic)}{(c-id)-(a-ib)} = \frac{d-b+i(c-a)}{c-a+i(b-d)}$$

Là on voit directement que le numérateur est égal à i fois le dénominateur et c'est terminé (on le voit d'autant plus facilement qu'on sait que c'est ça que l'on doit montrer : sinon, il faut une étape de simplification supplémentaire).

Correction 2 (Point de Vecten)**.** Mêmes remarques qu'à l'exercice précédent : traduire en nombres complexes les propriétés des carrés.

1. D'abord récapituler : le centre de gravité de ABC en est l'isobarycentre, donc son affixe est $\frac{1}{3}(a+b+c)$. Celui de PQR a pour affixe $\frac{1}{3}(p+q+r)$. Il s'agit donc simplement de montrer que $a+b+c = p+q+r$. Pour cela, il suffit d'exprimer p, q, et r en fonction de q, b et c (ou l'inverse) et de vérifier que c'est vrai. On pourrait utiliser la question 2 pour faire la 1 et calculer $p+q+r = \frac{a-ib+b-ic+c-ia}{1-i} = a+b+c$ et ça serait fini. Si on ne veut pas utiliser la question 2 pour faire la 1, on doit essentiellement refaire le même raisonnement : dans chaque carré, les sommets sont obtenus les uns des autres par rotations de $\pi/2$ par rapport aux centres, donc par exemple $a-p = i(b-p)$, $b-q = i(c-q)$ et $c-r = i(a-r)$. En sommant ces trois égalités on trouve $a+b+c = p+q+r$.
2. Voir exercice précédent : on obtient $p = \frac{a-ib}{1-i}$, $q = \frac{b-ic}{1-i}$ et $r = \frac{c-ia}{1-i}$.

3. Il s'agit de montrer que l'argument de $\frac{q-a}{r-p}$ est $\pm\pi/2$. Pour cela, il suffit de calculer :

$$\frac{q-a}{r-p} = \frac{b-a+i(a-c)}{c-a+i(b-a)} = -i$$

Même raisonnement qu'à l'exercice précédent. On remarque que non seulement les segments sont perpendiculaires, mais ils sont de même longueur. Cela dit ce n'était pas demandé.

Pour la conclusion, déjà, penser que pour montrer que des droites sont concourantes, une idée peut être de montrer que ce sont les médiatrices, hauteurs, médianes ou bissectrices d'un triangle. Ici, la question précédente montre que la droite (AQ) est la hauteur de PQR issue de Q. Le même raisonnement appliqué aux deux autres carrés permet de montrer que (AQ), (BR) et (CP) sont les hauteurs de PQR et sont donc concourantes.

Correction 3 (Caractérisation des triangles équilatéraux)**.** Il y a plusieurs façons de caractériser un triangle équilatéral : les côtés ont même longueur, ou bien : les trois angles sont égaux, ou bien : deux côtés sont de même longueur et l'angle entre eux vaut $\pi/3$.

D'autre part, dans la troisième assertion on reconnaît tout de suite l'expression d'une rotation : on a $-j^2 = e^{i\pi/3}$, et cette assertion dit donc que A est l'image de C par une rotation de centre B et d'angle $\pi/3$. C'est équivalent à ce que ABC soit équilatéral.

Enfin, comme $1 + j + j^2 = 0$, on voit facilement que les deux dernières assertions sont équivalentes, en développant la dernière :

$$a - b = -j^2(c-b) \Leftrightarrow a + (-j^2 - 1)b + j^2c = 0 \Leftrightarrow a + jb + j^2c = 0.$$

Correction 4 (Théorème de Napoléon)**.** À faire pour la semaine prochaine. L'exercice ressemble aux deux premiers, sauf qu'au lieu de carrés il y a des triangles équilatéraux, donc il faut utiliser l'exercice 3.

Correction 5 (Une homographie)**.** À faire pour la semaine prochaine.