

7. Calculs en géométrie affine

Dans tous les exercices, on désigne par \mathcal{E} l'espace de dimension 3.

1. Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère affine de \mathcal{E} . Soit A le point de coordonnées $(1, 0, -1)$ dans ce repère.
 - (a) Justifier que $\mathcal{R}' = (A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère affine de \mathcal{E} .
 - (b) Soit M le point de coordonnées (x, y, z) dans le repère \mathcal{R} . Quelles sont ses coordonnées dans le repère \mathcal{R}' ?
2. Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère affine de \mathcal{E} . Soient A, B, C les points de \mathcal{E} tels que $\vec{OA} = \vec{i}, \vec{OB} = \vec{j}, \vec{OC} = \vec{k}$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{R}' = (A, \vec{AO}, \vec{AB}, \vec{AC})$ est un repère affine de \mathcal{E} .
 - (b) Soit M le point de coordonnées (x, y, z) dans le repère \mathcal{R} . Quelles sont ses coordonnées dans le repère \mathcal{R}' ?

3. Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de \mathcal{E} . Soient A, B, C les points de coordonnées respectives

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une équation du plan passant par A, B et C .

4. Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de \mathcal{E} . Soit \mathcal{P} le plan défini par l'équation

$$2x + 3y + z - 1 = 0.$$

- (a) Déterminer une paramétrisation de \mathcal{P} .
 - (b) Déterminer un repère $(A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ dans lequel l'équation du plan \mathcal{P} s'écrit $Z = 0$ (les coordonnées d'un point dans ce repère étant notées (X, Y, Z)).
5. Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de \mathcal{E} . Soit A le point de coordonnées $(5, -1, 2)$ et B le point de coordonnées $(1, 1, -1)$. Déterminer des équations de la droite \mathcal{D} passant par A et B .

Trouver un repère dans lequel des équations de cette droite sont : $X = 0, Y = 0$.

6. Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de \mathcal{E} . On considère la droite \mathcal{D} définie par le système d'équations

$$\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

- (a) Paramétrer la droite \mathcal{D} .

(b) Déterminer un repère $\mathcal{R}' = (A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ dans lequel la droite \mathcal{D} a pour équation

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases},$$

les coordonnées d'un point dans ce repère étant notées (X, Y, Z) .

7. Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de \mathcal{E} . On considère les deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' définies respectivement par les équations

$$\mathcal{D} \quad \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad \mathcal{D}' \quad \begin{cases} y + z + 3 = 0 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Déterminer si ces deux droites sont sécantes et éventuellement donner les coordonnées de leur intersection.

8. Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de \mathcal{E} . On considère le plan \mathcal{P} d'équation

$$2x + 3y - z + 1 = 0$$

et \mathcal{D} la droite définie par le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Montrer que la droite \mathcal{D} coupe le plan \mathcal{P} en un unique point M dont on déterminera les coordonnées.

9. On considère les deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' de \mathbb{R}^3 définies respectivement par les équations

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

- Déterminer des repères (A, \vec{i}) et (A', \vec{i}') de ces 2 droites.
- Déterminer un vecteur \vec{u} orthogonal à ces 2 droites.
- Déterminer une équation du plan \mathcal{P} (resp. \mathcal{P}') contenant \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}') et parallèle à \vec{u} .
- Déterminer l'intersection H' (resp. H) du plan \mathcal{P} (resp. \mathcal{P}') avec la droite \mathcal{D}' (resp. \mathcal{D}).
- Montrer que la perpendiculaire commune à \mathcal{D} et \mathcal{D}' est la droite (HH') . Déterminer cette droite par un système d'équations et par un repère.
- Quelle est la plus petite distance d'un point de \mathcal{D} et d'un point de \mathcal{D}' ?