8. Angles et distances

Dans tous les exercices, on désigne par $\mathcal{E}$ l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Le cube $\mathcal{C}$ est celui dont les sommets ont pour coordonnées $(\pm 1, \pm 1 \pm 1)$ dans la base canonique.

Exercice 1. Compléter le vecteur $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, \sqrt{3}, -1)$ en une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Orthonomaliser la base $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(1, 1, 1)$. Dans ce nouveau repère, donner les coordonnées des sommets du cube $\mathcal{C}$. Dessiner la projection du cube sur le plan engendré par les deux premiers vecteurs, sur papier millimétré.

Exercice 3. (angles et distances dans le cube $\mathcal{C}$)

a) Calculer la longueur d'une diagonale.

b) Calculer l'angle entre deux diagonales.

c) Soit S un sommet et $[SA]$, $[SB]$ deux diagonales de faces adjacentes à S, dont l'une des extrémités est S. Calculer l'angle $(\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}})$.

Exercice 4. Calculer le projeté orthogonal du point $(1, 1, 1)$ sur la droite passant par $(1, 0, 1)$ et dirigée par $(2, 1, 0)$, ainsi que le projeté orthogonal de ce même point sur le plan d'équation $x - y + z = 1$. Calculer les distances de ce point à cette droite et à ce plan.

Exercice 5. (le dodécaèdre en coordonnées) Dans toute la suite, on note $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On a donc $\phi^{-1} = \phi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. On considère le cube de coordonnées $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Parmi ses sommets, on distingue $K(-1, -1, 1)$, $L(1, -1, 1)$, $M(1, 1, 1)$ et $N(-1, 1, 1)$ (situés sur la face « supérieure »). On définit enfin quatre nouveau points A, B, C et D de coordonnées $(-\phi^{-1}, 0, \phi)$, $(\phi^{-1}, 0, \phi)$, $(0, -\phi, \phi^{-1})$ et $(0, \phi, \phi^{-1})$.

a) Montrer que K et L sont sur le plan ABC.

b) Montrer que les points A, B, L, C et K sont les sommets (dans cet ordre) d'un pentagone régulier sur ce plan. On admet que $\frac{1-\sqrt{5}}{4} = \cos(\frac{3\pi}{5})$.

c) En déduire que A, B, et D sont des sommets d'un autre pentagone régulier, dont on précisera les (coordonnées des) deux autres sommets.

d) Montrer enfin que les points L, B, M sont trois sommets consécutifs d'un troisième pentagone. Donner les coordonnées de ses deux autre sommets.

e) Montrer que $(BC) \perp (BN)$ et que $(BK) \perp (BD)$. Ceci permet de commencer à distinguer deux autres cubes dans le dodécaèdre. Il y a encore deux autres cubes, dont A est un sommet.