# Partiel de géométrie

Tous documents interdits. Le sujet est long pour vous permettre de piocher dans ce que vous préférez (complexes ou géométrie pure).

Faire obligatoirement des figures d'une demi-page minimum. Les figures trop petites n'obtiendront pas de points. Commencer par tracer une figure à main levée au brouillon pour voir l'allure des points, puis tracer au propre à la règle et au compas. Ne pas hésiter à faire les figures sur des copies séparées.

Construire signifie : 1) décrire la construction si elle n'est pas classique, 2) prouver que la construction est correcte, 3) tracer la construction. Les étapes 1) et 2) sont superflues si la construction est classique (construction de milieu, de médiatrice, etc).

**Exercice 1** (Théorème de Varignon)**.** Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe, et $I$, $J$, $K$, $L$ les milieux de ses côtés.

1. Tracer une figure. Montrer en utilisant le théorème de Thalès que $IJKL$ est un parallélogramme. Montrer que l'aire de $ABCD$ est le double de celle de $IJKL$.
2. Montrer à nouveau ces deux résultats en utilisant les nombres complexes.

**Exercice 2** (Théorème de Pappus, version affine)**.**

1. Rappeler la définition d'une homothétie. Montrer que deux homothéties de même centre commutent.
2. Soient $D$ et $D'$ deux droites que l'on supposera sécantes en $O$. Soient $A, B, C$ trois points sur $D$, et $A'$, $B'$ et $C'$ trois points sur $D'$, tels que $(AB')//(BC')$ et $(BA')//(CB')$. Tracer une figure. Montrer que $(AA')//(CC')$.
3. On suppose cette fois $D$ et $D'$ parallèles, et $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$, $C'$ comme plus haut. Tracer une autre figure. Montrer que l'on a toujours $(AA')//(CC')$.

**Exercice 3.** Soient $A, B, C, D$ deux à deux distincts, d'affixes $a$, $b$, $c$ et $d$. Montrer que $ABCD$ est un carré direct ssi ($a + c = b + d$ et $a + bi = c + di$).

**Exercice 4.** Soit $ABC$ un triangle direct. Soit $D$ (resp. $E$) tel que $DBA$ (resp. $ACE$) soit direct et isocèle rectangle en $D$ (resp. $E$). Soit $L$ tel que $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{DB}$.

1. Faire une figure et construire $D$, $E$ et $L$.
2. Montrer en utilisant les affixes des points que $DLE$ est isocèle rectangle en $E$.

---

Dans la suite on s'intéresse au

**Théorème 1** (Ptolémée)**.** Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe, direct. Alors $A, B, C, D$ sont cocycliques si et seulement si $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

**Exercice 5** (Ptolémée, preuve géométrique du sens direct)**.** Ici on suppose $A, B, C, D$ cocycliques.

1. Faire une figure au brouillon et montrer que $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ et trois relations similaires sur d'autres angles.
2. Soit $K$ le point de la diagonale $[AC]$ tel que $\widehat{ABK} = \widehat{DBC}$. Faire une figure et construire $K$ en expliquant (faire la figure de telle sorte que $K$ soit lisible).

3. Montrer que les triangles $ABK$ et $DBC$ sont semblables, de même que $ABD$ et $KBC$, par des homothéties dont on précisera les centres et les rapports. Note : il suffit pour cela de montrer qu'ils ont mêmes angles. En déduire des relations sur les côtés de ces triangles.
4. Conclure.

---

**Exercice 6** (Miquel)**.** Soit $ABC$ un triangle direct, et $P$, $Q$ $R$ trois points situés sur $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les cercles circonscrits à $ARQ$ et $BPR$. Ils se coupent en $R$ et en un deuxième point $T$. Montrer que $T$ est sur le cercle circonscrit à $PCQ$. Tracer une figure.

---

**Exercice 7** (Droite d'Euler)**.** Soit $ABC$ un triangle, et notons $G$, $\Omega$ et $H$ le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit, et l'orthocentre. On suppose connu que le centre de gravité est aux deux tiers des médianes, et on désire prouver que $\Omega$, $G$, et $H$ sont alignés et que $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$.

1. Faire une figure et tracer $\Omega$, $G$ et $H$.
2. Considérer l'homothétie de centre $G$ et de rapport adéquat et conclure.
3. Autre preuve, utilisant les nombres complexes. On note $a$, $b$, $c$, $h$, $g$ et $\omega$ les affixes des points. On suppose que $\Omega$ est l'origine $O$ du plan, de sorte que $\omega = 0$. Écrire $g$ en fonction de $a$, $b$ et $c$. Que dire du module de $a$, $b$ et $c$ ? On note $h' = a + b + c$. Que doit-on prouver, en termes du nombre complexe $h'$ et des autres points ?
4. Introduisons $s = a + b$. Montrer que $OSH'C$ est un parallélogramme. En déduire que $H'$ est sur une hauteur (laquelle), soit en considérant le quadrilatère $OASB$ soit par une autre méthode. Finir la preuve.

---

Dans la suite on considère un triangle $ABC$, a priori non rectangle. On note $A'$, $B'$, et $C'$ les pieds des hauteurs issues de $A$, $B$ et $C$, et $H$ l'orthocentre. Le triangle $A'B'C'$ est appelé triangle orthique.

**Exercice 8.** On veut démontrer que les hauteurs de $ABC$ sont les bissectrices de $A'B'C'$. On considère les trois cercles $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ de diamètres $[BC]$, $[HB]$ et $[HC]$. Faire une figure. Quels points appartiennent à ces cercles ? Comparer $\widehat{B'A'H}$ et $\widehat{HA'C'}$ et conclure.

**Exercice 9.** Mêmes notations qu'à l'exercice précédent, et on note $\alpha = \widehat{BAC}$. On cherche à montrer que le triangle orthique est le triangle inscrit à $ABC$ dont le périmètre est minimal.

1. Soit $L \in [BC]$, $M \in [AC]$, $N \in [AB]$ : on dit que $LMN$ est inscrit dans $ABC$. Soit $L_1$ le symétrique de $L$ par rapport à $[AB]$ et $L_2$ le symétrique de $L$ par rapport à $[AC]$. Faire une nouvelle figure. Calculer le périmètre de $LMN$ en fonction des points $L_1$, $N$, $M$ et $L_2$.
2. Si $L$ est fixé et si on fait varier $M$ et $N$, quel est le périmètre minimal noté $p(L)$ de $LMN$ ?
3. Calculer l'angle $\widehat{L_1AL_2}$ et en déduire que $L_1L_2 = 2.AL.\sin(\alpha)$.
4. En déduire que $p(L)$ est minimal ssi $L = A'$.
5. Montrer que dans ce cas $LMN$ est le triangle orthique.

**Exercice 10.** S'il reste du temps, montrer le théorème de Ptolémée (les deux sens) à l'aide de nombres complexes. Rappeler d'abord la condition de cocyclicité en termes de nombres complexes, et utiliser essentiellement la seule inégalité disponible avec des nombres complexes.