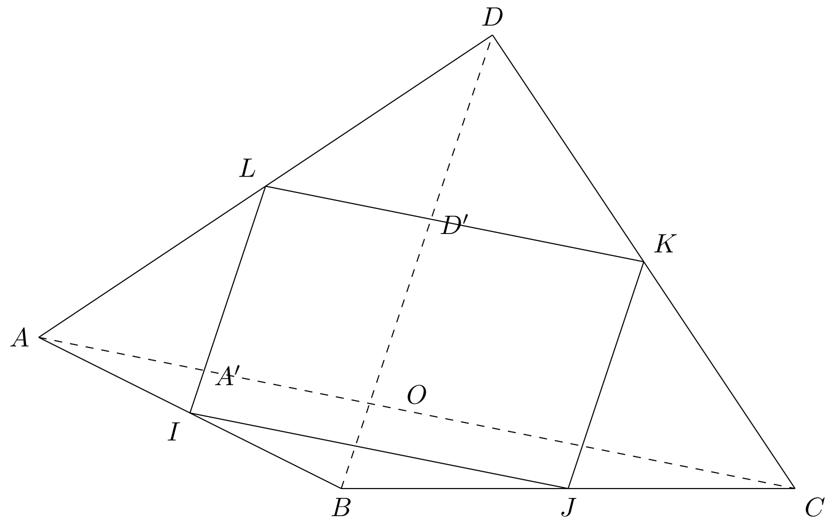
Partiel de géométrie — Correction incomplète

Le fichier sera actualisé

Exercice 1 (Varignon).



1. Thalès dans le triangle ABC donne directement $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Ensuite, Thalès dans le triangle ADC donne $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ et donc $IJKL$ est un parallélogramme. Pour l'aire, en notant O l'intersection des diagonales, il suffit de traiter séparément les quatres triangles ABO, BCO, CDO et DAO. Faisons le cas de ADO, et notons $A' = (AC) \cap (IL)$ et $D' = (DB) \cap (LK)$ comme dans la figure. Par Thalès, ces points sont les milieux de $[AO]$ et $[DO]$. Dans le triangle ADO, on a donc (par réciproque de Thalès, disons)
$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{LD} = \overrightarrow{A'D'}, \text{ et } \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A'O} = \overrightarrow{LD'}.$$
On en déduit que les trois triangles $AA'L$, $LD'D$, et $A'OD'$ sont identiques à tranlation près, et ont même aire que $A'D'L$. Ceci permet de conclure.
2. On note exceptionnellement i l'affixe de I et non le nombre complexe i. Alors $i = \frac{1}{2}(a+b)$ et de même pour les autres milieux. On voit alors que $j - i = \frac{1}{2}(c-a)$ et que $k - l = \frac{1}{2}(c-a)$, donc $j - i = k - l$ et donc $IJKL$ est un parallélogramme. Par le cours, son aire est $|Im\overline{(j-i)}(l-i)|$. Un calcul permet de conclure.

Exercice 2 (Théorème de Pappus, version affine).

1. Cours.
2. Soit f (resp. g) l'homothétie de centre O envoyant A sur B (resp. B sur C). Alors f envoie la droite (AB') sur une droite parallèle passant par $f(A) = B$, c'est-à-dire sur la droite (BC'), et donc $f(B') = C'$. Le même raisonnement donne $g(A') = B'$. On a $g(f(A)) = C$, et que $f(g(A')) = C'$. Or, $f \circ g = g \circ f$ donc $g(f(A')) = C'$. On en déduit que (CC') est parallèle à (AA') puisque c'est son image par $g \circ f$.
3. On remplace les homothéties par des translations. Cette question a été faite par quasiment tout le monde.

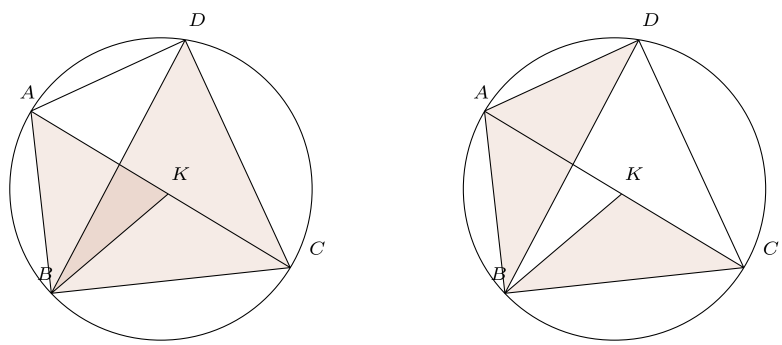
Exercice 3. Il suffit de comprendre ce que signifient les égalités de nombres complexe : $a + c = b + d$ signifie que $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu, et $a + bi = c + di$ est équivalente à $a - c = i(d - b)$ et signifie que les diagonales ont même longueur et sont orthogonales. Or, un quadrilatère $ABCD$ est effectivement un carré ssi les diagonales ont même milieu, même longueur et sont perpendiculaires.

Exercice 4. Le triangle DBA est direct et isocèle rectangle en D, c'est-à-dire que $DB = DA$ et $(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}}) = +\pi/2$ (angle orienté), autrement dit $d - a = i(d - b)$. On a de même $e - c = i(e - a)$. D'autre part, $l - c = b - d$ par construction, donc $l = b - d + c$.

On veut montrer que EDL est isocèle rectangle en E, donc que $l - e = \pm i(d - e)$. Il suffit de vérifier : on a

$$l - e = b - d + c - e = i(d - a) + i(a - e) = i(d - e).$$

Exercice 5 (Ptolémée)**.**



Le théorème de l'angle inscrit sur l'arc BC donne l'égalité $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. La considération des autres arcs CD, DA et AB donne les égalités $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$, $\widehat{DBA} = \widehat{DCA}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

Suivons l'énoncé. Soit K le point de la diagonale $[AC]$ tel que $\widehat{ABK} = \widehat{DBC}$.

Alors, ABK et DBC sont semblables (première figure) car leurs angles sont égaux : $\widehat{BAK} = \widehat{BDC}$ et $\widehat{ABK} = \widehat{DBC}$. On a une similitude de rapport

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BC}{BK} = \frac{DC}{AK},$$

envoyant ABK sur DBC.

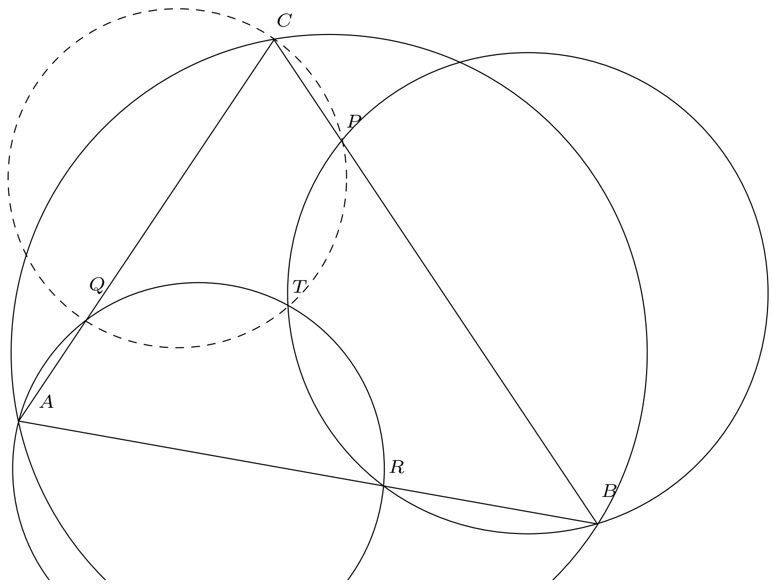
De même, ABD et KBC sont semblables (deuxième figure) car leurs angles sont égaux : $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = \widehat{KCB}$ et $\widehat{ABD} = \widehat{KBC}$. La similitude envoyant ABD sur KBC a pour rapport

$$\frac{BK}{BA} = \frac{BC}{BD} = \frac{KC}{AD}.$$

On a $AC = AK + KC$, donc $AC \cdot BD = AK \cdot BD + KC \cdot BD$, or, $AK \cdot BD = AB \cdot CD$ (première similitude), et $KC \cdot BD = AD \cdot BC$ (seconde similitude), d'où le résultat :

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Exercice 6 (Miquel)**.**



Il suffit de montrer que T, P, C, Q sont cocycliques et pour cela il suffit par le cours de montrer que les angles $\widehat{TPC}$ et $\widehat{TQC}$ sont supplémentaires. Or par construction, les couples suivants d'angles sont supplémentaire :
$\widehat{TQC}$ et $\widehat{TQA}$ car $Q \in [AC]$,
$\widehat{TQA}$ et $\widehat{TRA}$ par cocyclicité,
$\widehat{TRA}$ et $\widehat{TRB}$ car $R \in [AB]$,
$\widehat{TRB}$ et $\widehat{TPB}$ par cocyclicité,
$\widehat{TPB}$ et $\widehat{TPC}$ car $P \in [BC]$.
On en déduit immédiatement que $\widehat{TQC} = \widehat{TRA} = \widehat{TPB}$ et $\widehat{TQA} = \widehat{TRB} = \widehat{TPC}$ sont supplémentaires.

Exercice 7 (Droite d'Euler)**.** *(On sait que pour montrer que trois points sont alignés, une méthode classique est de montrer que deux d'entre eux sont images l'un de l'autre par une homothétie centrée sur le troisième. Ici, vu que l'énoncé suggère le centre G, et que l'on sait que l'on doit prouver $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$, le rapport adéquat à considérer est manifestement -2 ou $-\frac{1}{2}$ pour l'homothétie inverse.)*
L'homothétie de centre G et de rapport -2 envoie les milieux des côtés sur les sommets opposés, et envoie donc les médiatrices sur les droites parallèles aux médiatrices passant par les sommets c'est à-dire les hauteurs. Elle envoie donc O sur H, et donc O, G et H sont alignés et on a $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Deuxième preuve : on a $g = \frac{1}{3}(a + b + c)$, on sait que $|a| = |b| = |c|$, et on veut montrer que $h = 3g$ c'est-à-dire $h' = h$. Soit donc $s = a + b$. On a $h' - c = a + b + c - c = a + b = s$, donc $OSH'C$ est un parallélogramme et $(H'C)$ est parallèle à (OS). D'autre part le quadrilatère $OASB$ a se quatre côtés de même longueur donc est un losange, donc ses diagonales (OS) et (AB) sont perpendiculaires. On en déduit que H' est sur la hauteur issue de A. Le même raisonnement pour les deux autres hauteurs montre que H' est sur les trois hauteurs, donc que $H' = H$.

Exercice 8 (bissectrices du triangle orthique)**.** Les points $B, C, B'C'$ appartiennent à $\mathcal{C}$ (triangles rectangles en BCB' et BCC' inscrits dans le cercle). Les points H, B, A', C' appartiennent à $\mathcal{C}'$, et enfin les points H, C, A', B' appartiennent à $\mathcal{C}''$. Par le théorème de l'angle inscrit appliqué une fois dans chaque cercle, on en déduit :

$$\widehat{B'A'H} = \widehat{B'CH} = \widehat{B'CC'} = \widehat{B'BC'} = \widehat{HBC'} = \widehat{HA'C'}.$$

D'où (AA') est la bissectrice de $\widehat{B'A'C'}$.

Exercice 9.

1. Le périmètre de LMN est $LM + MN + NL$. Or, $LN = L_1N$ par symétrie, et de même $LM = ML_2$. Donc le périmètre est $L_1N + NM + ML_2$.
2. Si L est fixé et si on fait varier M et N, le périmètre minimal noté $p(L)$ de LMN est donc atteint lorsque L_1, M, N et L_2 sont alignés (le plus court chemin entre L_1 et L_2 est la ligne droite). Il vaut alors la distance L_1L_2 et les points M et N sont les intersections de la droite L_1 et L_2 avec $[AB]$ et $[AC]$.
3.
4.
5.

Exercice 10. (Ptolémée par les nombres complexes)

A rédiger. Il suffit d'écrire le cours sur la cocyclicité, puis d'utiliser l'inégalité triangulaire pour les nombres complexes. Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire donne un birapport réel, c'est-à-dire la cocyclicité.