Entraînement pour l'examen

Ce devoir n'est pas à rendre. Il porte sur la première partie du cours. Les anneaux principaux et leurs modules seront également au programme.

Exercice 1. (Anneaux locaux)

On dit qu'un anneau A est *local* s'il ne possède qu'un seul idéal (propre) maximal. Dans ce cas, cet idéal est en général noté $\mathfrak{m}_A$ ou $\mathfrak{m}$. Le corps $A/\mathfrak{m}_A$ est en général noté κ_A ou κ.

1. Montrer qu'un corps est un anneau local.
2. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $k[X]$ ne sont pas locaux.
3. Montrer qu'un produit de deux anneaux locaux n'est pas local.
4. Montrer qu'un quotient d'anneau local est local.
5. Soit k un corps et $n > 1$. Montrer que $k[X]/(X^n)$ est local.
6. Montrer que $k[X]/(X^2 + X)$ n'est pas local. Penser au lemme chinois.
7. Montrer que l'ensemble des fractions rationnelles $f \in k(X)$ n'ayant pas 0 pour pôle (c'est-à-dire celles dont le dénominateur n'est pas divisible par X) est un anneau, et que cet anneau est local.
8. Montrer que l'ensemble des rationnels dont le dénominateur n'est pas divisible par p, noté $\mathbb{Z}_p$ est un anneau, et que cet anneau est local. On l'appelle l'ensemble des entiers p-adiques. Notez la ressemblance avec l'exemple précédent.
9. Montrer que $k[[X]]$, l'anneau des séries formelles en une variable, est un anneau local.
10. Montrer que si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux entre deux anneaux locaux, alors $f(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_B$.

Exercice 2. (Lemme de Nakayama pour les anneaux locaux)

On fixe A un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.

1. Soit M un A-module de type fini. Montrer que si $M = \mathfrak{m}M$, alors $M = 0$. Penser au théorème de Cayley-Hamilton et à sa preuve.

   En déduire :

2. Soit M un A-module de t.f. et N un sous-module. Si $M = N + \mathfrak{m}M$, alors $M = N$.
3. Soit M un A-module de t.f., et $(m_i)_{1\leq i\leq k}$ des éléments de M dont les classes dans $M/\mathfrak{m}M$ engendrent $M/\mathfrak{m}M$ en tant que A-module. Montrer que les m_i engendrent M.
4. Soient M et N deux A-modules de t.f., $\phi : M \to N$ un morphisme et $\bar{\phi} : M/\mathfrak{m}M \to N/\mathfrak{m}N$ le morphisme induit (bien défini par l'exercice précédent), que l'on peut voir comme un morphisme de A-modules ou mieux, comme un morphisme de κ-ev. Montrer que si $\bar{\phi}$ est surjectif, ϕ aussi.

Exercice 3. (« Un module projectif de t.f. est localement libre », avec version faible de « localement libre ».)

Montrer qu'un module M de présentation finie sur un anneau local est libre. Considérer le module quotient $M/\mathfrak{m}M$ et sa structure de κ_A-espace vectoriel.

Remarque finale : tous ces résultats ont un sens géométrique très clair si on les reformule avec le langage adéquat, celui de la géométrie algébrique. Voir les livres de M. Reid, par exemple.