DM supplémentaire

Exercice 1. On considère l'équation $35x + 42y = k$, d'inconnues $x, y \in \mathbb{Z}$, et de paramètre $k \in \mathbb{Z}$. On veut déterminer l'ensemble des paramètres tels que l'équation ait des solutions et dans ce cas, on veut l'ensemble des solutions en fonction du paramètre k.

1. Si nécessaire, relire un livre de terminale S (spécialité maths) sur ce sujet et proposer une rédaction du problème à ce niveau. En particulier, résoudre l'équation $35x - 42y = 14$.
2. On considère $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto 35x - 42y$. La question précédente est résolue en étudiant les sous-modules $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ de $\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{Z}$. Quelle est l'image de f ?
3. Mettre la matrice de f sous forme normale. En déduire une base du noyau de f.
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $35x + 42y = 14$.

Exercice 2. [Généralisation en dimension supérieures avec perspective licence/master] On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 5y + z &= k \\ 5x - y - 2z &= l \end{cases}$$

1. (Niveau L1) Dans cette question, on travaille avec des inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et des paramètres $k, l \in \mathbb{R}$. Le système a-t-il toujours des solutions ? Résoudre le système, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des solutions du système en fonction des paramètres (k, l).
2. (Cas plus général) On travaille cette fois avec inconnues et paramètres dans $\mathbb{Z}$. Résoudre le système.

Exercice 3. Calculer les invariants de similitude de la matrice réelle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Quel est le polynôme minimal de la matrice ? Son polynôme caractéristique ? La matrice est-elle cyclique ?

Indications

Corrections

Correction de ?? *Ce premier exercice permet de revoir la théorie élémentaire des équations diophantiennes niveau lycée, de voir ou revoir le lien avec l'algèbre linéaire sur $\mathbb{Z}$ et les facteurs invariants, et d'utiliser l'algorithme des facteurs invariants pour étudier le noyau d'un morphisme, plutôt que son image.*

1. Le cas général est le suivant : on considère l'équation diophantienne $ax + by = k$, notée (E), admet des solutions entières ssi $d := \mathrm{pgcd}(a, b)$ divise k. Si c'est le cas, l'ensemble des solutions est obtenu comme suit. Soit (u, v) une paire de Bézout pour a et b, c'est-à-dire un couple d'entiers tels que $au + bv = \mathrm{pgcd}(a, b)$. (On peut calculer un tel couple à l'aide de l'algorithme d'Euclide, par exemple.) D'autre part, notons λ tel que $k = \lambda d$. Alors par construction, le couple $(\lambda u, \lambda v)$ est solution de $ax + by = k$. On a donc trouvé une solution particulière de l'équation.
   D'autre part, notons (E_h) l'équation homogène associée $ax + by = 0$. En écrivant $a = da'$ et $b = db'$, l'ensemble des solutions de (E_h) est le sous-ensemble suivant de $\mathbb{Z}^2$:
   $$S_h = \begin{pmatrix} b' \\ -a' \end{pmatrix} \mathbb{Z}$$
   Comme la différence de deux solutions de (E) est une solution de (E_h), on en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est obtenu en sommant une solution particulière de (E) à la solution générale de (E_h). L'ensemble des solutions de (E) est :
   $$S = \begin{pmatrix} \lambda u \\ \lambda v \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} b' \\ -a' \end{pmatrix}$$
2. Le pgcd d de a et b est le générateur de l'idéal $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$. Ceci signifie exactement que l'image de f est $7\mathbb{Z}$.
3. La matrice de f dans les bases canoniques est la matrice-ligne $(35\ 42)$. En appliquant l'algorithme des facteurs invariants à la matrice, voit que les opérations à faire sont successivement $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, puis $C_1 \leftrightarrow C_2$ et enfin $C_2 \leftarrow C_2 - 5C_1$, et le résultat est $(7\ 0)$ comme il facile de le deviner dès le début, vu la petite taille de la matrice. En termes de multiplications de matrices, on a donc :
   $$(1) \cdot \begin{pmatrix} 35 & 42 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Ici, il n'y a pas d'opérations sur les lignes, mais on a mis la matrice (1) (l'identité en dimension 1) pour marquer le fait qu'en général, il y a quelque chose à cet endroit. Après calcul, on obtient donc :
   $$\begin{pmatrix} 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 42 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$
   On constate que dans ce cas très simple, l'algorithme nous a calculé non seulement le pgcd (7) qui se trouve dans la matrice réduite, mais aussi une paire de Bézout pour $(35, 42)$ *: c'est la première colonne (*$35 \cdot (-1) + 42 \cdot 1 = 7$*). La deuxième colonne de la matrice de passage elle, contient une base du noyau de f comme il est expliqué ci-dessous.*
   Cette écriture implique que
   $$\mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 35 & 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{Z}e_2 = \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(De façon générale, si $A = BP$ avec P inversible, alors $\operatorname{Ker}(B) = P(\operatorname{Ker} A)$, en d'autres termes, P induit un isomorphisme de $\operatorname{Ker} A$ sur $\operatorname{Ker} B$: P envoie bien un noyau dans l'autre de façon injective car P est injective, et la surjectivité sur les noyaux découle de l'inversibilité de P.)

4. On rappelle le raisonnement fait plus haut. Si (x, y) et (x', y') sont deux solutions de (E), alors il est évident que $(x - x', y - y')$ est dans le noyau de f. L'ensemble des solutions de $35x + 42y = 14 (= 2 \times 7)$ est donc la somme d'une solution particulière et du noyau de f, donc :

$$S = \left\{ 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{Z} \right\} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(Préférer la deuxième écriture, en général.)

Remarque de fin : même si cela semble plus long que la solution rédigée niveau lycée, il faut comprendre que résoudre une équation diophantienne de degré un c'est vraiment un problème d'images et de noyaux d'applications $\mathbb{Z}$-linéaires. C'est le point de vue adapté si on désire généraliser à plus d'équations et d'inconnues.