1. Modules et morphismes

Exercice 1. [Foncteurs $\mathrm{Hom}(-, M)$ et $\mathrm{Hom}(M, -)$]

Soit $f : M \to N$ un morphisme de A-modules. Montrer que pour tout module P, les applications

$$f_* : \underset{A}{\mathrm{Hom}}(P, M) \xrightarrow{f\circ} \underset{A}{\mathrm{Hom}}(P, N) \text{ et } f^* : \underset{A}{\mathrm{Hom}}(N, P) \xrightarrow{\circ f} \underset{A}{\mathrm{Hom}}(M, P)$$

sont des morphismes de A-modules.

Exercice 2. Soit $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ une suite exacte de A-modules. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

1. La suite est scindée.
2. Pour tout A-module N, la suite
$$0 \to \underset{A}{\mathrm{Hom}}(N, M') \xrightarrow{f_*} \underset{A}{\mathrm{Hom}}(N, M) \xrightarrow{g_*} \underset{A}{\mathrm{Hom}}(N, M'') \to 0$$
est exacte.
3. Pour tout A-module N, la suite
$$0 \to \underset{A}{\mathrm{Hom}}(M'', N) \xrightarrow{g^*} \underset{A}{\mathrm{Hom}}(M, N) \xrightarrow{f^*} \underset{A}{\mathrm{Hom}}(M', N) \to 0$$
est exacte.

Exercice 3. [Modules projectifs] Soit P un A-module. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout morphisme surjectif $g : E \to F$ de modules et pour tout $f \in \mathrm{Hom}_A(P, F)$, il existe $h \in \mathrm{Hom}_A(P, E)$ tel que $f = g \circ h$.
2. Pour tout morphisme surjectif $\pi : M \to P$, il existe un morphisme $s : P \to M$ tel que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_P$ (autrement dit tout morphisme surjectif vers P admet une section).
3. Il existe un A-module M tel que $M \oplus P$ est libre.

Un module P vérifiant ces conditions est dit *projectif*. Montrer qu'un module libre est projectif. Donner un exemple de module non projectif.

Exercice 4. [Modules injectifs] Soit J un A-module. On dit que J est un A-module *injectif* si pour tout morphisme injectif $i : E \to F$ de modules et pour tout $f \in \mathrm{Hom}_A(E, J)$, il existe $h \in \mathrm{Hom}_A(F, J)$ tel que $f = h \circ i$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module injectif.
2. Montrer qu'un produit quelconque de modules injectifs est injectif.
3. On peut montrer que qu'un module J est injectif ssi la condition en apparence plus faible suivante est vérifiée : pour tout idéal I de A (avec inclusion $i : I \hookrightarrow A$) et pour tout $f \in \mathrm{Hom}_A(I, J)$, il existe $h \in \mathrm{Hom}_A(A, J)$ tel que $f = h \circ i$. Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont injectifs.
4. Montrer que tout module se plonge dans un module injectif.

Exercice 5. On considère trois A-modules M, N et P et deux morphismes $f : M \to N$ et $g : M \to P$.

1. On suppose que A est un corps. Montrer qu'il existe un morphisme $h : N \to P$ tel que $h \circ f = g$ ssi $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$.
2. Trouver un contre-exemple si A n'est pas un corps, par exemple avec $A = \mathbb{Z}$ et des modules simples.
3. Si A est quelconque, quelles conditions peut-on rajouter sur les modules M, N et P pour que l'équivalence soit vérifiée ?

Exercice 6. On considère trois A-modules M, N et P et deux morphismes $f : M \to P$ et $g : N \to P$.

1. On suppose que A est un corps. Montrer qu'il existe $h : M \to N$ tel que $f = g \circ h$ ssi $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$.
2. Trouver un contre-exemple si $A = \mathbb{Z}$
3. Si A est quelconque, quelles conditions peut-on rajouter sur les modules M, N et P pour que l'équivalence soit vérifiée ?