2. Modules noethériens et artiniens

Exercice 1. Soit $f : M' \to M$ un morphisme injectif, et $g : M \to M''$ un morphisme surjectif, tel que $g \circ f = 0$. Montrer que M est noethérien ssi M', M'' et $\mathrm{Ker}(g)/\mathrm{Im}(f)$ le sont.

Exercice 2. Soit M un A-module et N_1, N_2 deux sous-modules.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont noethériens ssi $N_1 + N_2$ est noethérien.
2. Montrer que M/N_1 et M/N_2 sont noethériens ssi $M/(N_1 \cap N_2)$ est noethérien.

Exercice 3. Soit M un A-module noethérien et f un endomorphisme de M. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(f^n) \cap \mathrm{Im}(f^n) = 0$.

Exercice 4. [Modules artiniens] Soit M un A-module. Montrer que l'on a équivalence entre :

1. Toute suite décroissante d'idéaux est stationnaire à partir d'un certain rang.
2. Tout ensemble non vide de sous-modules admet un élément minimal pour l'inclusion

Un module vérifiant ces propriétés est dit *artinien*.

Exercice 5. Montrer que $\mathbb{Z}$ n'est pas artinien, et qu'un groupe abélien fini est artinien.

Exercice 6. Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte courte de modules. Montrer que M est artinien ssi M' et M'' le sont.

Exercice 7. On dit qu'un anneau A est artinien s'il est artinien comme A-module. Si l'anneau A est artinien, montrer que tout A-module de type fini est artinien.

Exercice 8. Soit M un module artinien, et $f \in \mathrm{End}_A(M)$. Montrer que f est injectif ssi f est bijectif.

Exercice 9. [Décomposition de Fitting]

1. (Le cas des espaces vectoriels) Soit E un k-ev de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer que la suite de sous-espaces $\mathrm{Ker}(f^n)$ est croissante, que la suite $\mathrm{Im}(f^n)$ est décroissante, que les deux sont stationnaires à partir d'un rang k et qu'alors on a $E = \mathrm{Ker}(f^k) \oplus \mathrm{Im}(f^k)$.
2. Soit M un module noethérien et artinien, et f un endomorphisme de M. Montrer qu'il existe une décomposition en somme directe de deux sous-modules modules f-stables notés $f^\infty(M)$ et $f^{-\infty}(0)$ tels que la restriction de f à $f^\infty(M)$ soit un automorphisme et la restriction de f à $f^{-\infty}(0)$ soit nilpotente.