3. Modules de type fini sur les anneaux principaux

Exercice 1. Déterminer les facteurs invariants des matrices entières suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -10 & 14 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Déterminer les invariants de similitude des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Montrer qu'un groupe abélien non cyclique contient un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ pour un certain nombre premier p.

Exercice 4. Déterminer le nombre de groupes abéliens d'ordre 12, 16, 51 puis 360 (à isomorphisme près).

Exercice 5. Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}$, déterminer le nombre de classes d'isomorphisme de groupes abéliens de cardinal n.

Exercice 6. Soit G un groupe abélien fini. L'exposant $\exp(G)$ de G est le ppcm des ordres de tous les éléments de G. Montrer qu'il existe un élément $g \in G$ d'ordre $\exp(G)$.

Exercice 7.

1. Soit $\Gamma = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ a - b \text{ est divisible par } 10\}$. Montrer que Γ est un sous-groupes de $\mathbb{Z}^2$, déterminer une base de $\mathbb{Z}^2$ adaptée à G et décrire $\mathbb{Z}^2/\Gamma$.
2. Soit Γ le sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$ engendré par $(2,5)$, $(5-1)$ et $(1,-2)$. Déterminer une base de $\mathbb{Z}^2$ adaptée à Γ et décrire $\mathbb{Z}^2/\Gamma$.
3. Soit Γ le sous-groupe de $\mathbb{Z}^3$ engendré par $(4,8,10)$et $(6,2,0)$. Décrire $\mathbb{Z}^3/\Gamma$.

Exercice 8. On considère l'endomorphisme $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3)$ donné dans la base canonique par

$$T(e_1) = -e_1 - 2e_2 + 6e_3,\ T(e_2) = -e_1 + 3e_3,\ T(e_3) = -e_1 - e_2 + 4e_3$$

Calculer les facteurs invariants de la matrice.